Stage olympique de Saint-Malo

Cours – Équations fonctionnelles

Mardi 29 juillet 2003

par

Pierre Bornsztein

et

Moubinool Omarjee

Table des matières

1 Généralités

Une *équation fonctionnelle* est une équation dont l'inconnue est une fonction.

Par exemple :
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que, pour tous réels x et y :

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Avant de résoudre cette équation fonctionnelle, il n'est sans doute pas inutile de faire quelques rappels.

Même si certains exercices porteront parfois sur des fonctions complexes ou de deux variables, un souci de simplification nous fera limiter l'exposé qui suit aux fonctions d'une variable réelle.

Définition 1 *Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

Définir une fonction *f de X dans $\mathbb{R}$, c'est associer à chaque réel x de X un unique réel, noté $f(x)$, que l'on appelle* l'image *de x par f.*

L'ensemble X est appelé l'ensemble de définition *de f.*

Exemples : *a)* À chaque $x \in \mathbb{R}$, on associe $f(x) = x^2$. On définit ainsi une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b) À chaque entier $n \neq 0$, on associe le nombre $f(n)$ égal au nombre de ses diviseurs premiers. De cette façon, on définit bien une fonction de $\mathbb{Z}^\star$ dans $\mathbb{R}$.

Mais, contrairement à l'exemple précédent, on ne dispose pas ici de formule simple qui permette de déterminer $f(n)$ après une simple application numérique.

En conclusion : Attention ! Les fonctions ne sont pas toutes définies par des formules algébriques plus ou moins simples.

Définition 2 *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction. On note $f(X) = \{f(x),\, x \in X\}$.*

- La fonction f est dite surjective *de X sur Y si $Y = f(X)$, c.à.d. si tout $x \in X$ a son image dans Y et tout $y \in Y$ admet au moins un antécédent par f.*

- La fonction f est dite injective *de X sur Y si tout $y \in Y$ admet au plus un antécédant par f. Dans la pratique, cela signifie que, pour tous $a, b \in X$, si $f(a) = f(b)$ alors $a = b$.*

- La fonction f est une bijection *de X sur Y si elle est à la fois injective et surjective de X sur Y.*

Exemple : La fonction $f : x \mapsto x^2$ n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ car -1 n'admet pas d'antécédant. Plus précisément, on a $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$, et donc f est surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^+$.

Elle n'est injective ni de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, ni de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^+$ car, dans les deux cas, on a $f(1) = 1 = f(-1)$.

Par contre, f est injective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}$, ou de $\mathbb{R}^-$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$ (ou de $\mathbb{R}^-$ sur $\mathbb{R}^+$).

Remarque : Dans ce qui suit, on dira parfois que $f : A \to B$ est injective (resp. surjective, bijective) sans préciser le « de A sur B ».

Définition 3 *Soit $f : X \to Y$ une bijection. La* fonction réciproque *de f est la fonction, notée f^{-1}, avec $f^{-1} : Y \to X$ et définie par :*

Pour tout $y \in Y$, $f^{-1}(y) = x$, où x est l'unique élément de X tel que $f(x) = y$ (c.à.d. x est l'unique antécédant de y par f).

Exemple : La fonction réciproque de $f : x \mapsto x^2$ considérée comme définie sur et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ est la fonction $f^{-1} : x \mapsto \sqrt{x}$. Par contre, si f est considérée comme définie sur $\mathbb{R}^-$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, alors $f^{-1} : x \mapsto -\sqrt{x}$.

Définition 4 *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction, et I une partie de X.*

La fonction f est dite croissante *(resp.* strictement croissante*) sur I lorsque, pour tous $a, b \in I$, si $a < b$ alors $f(a) \leqslant f(b)$ (resp. $f(a) < f(b)$).*

La fonction f est dite décroissante *(resp.* strictement décroissante*) sur I lorsque, pour tous $a, b \in I$, si $a < b$ alors $f(a) \geqslant f(b)$ (resp. $f(a) > f(b)$).*

La fonction f est dite monotone *sur I lorsqu'elle est soit croissante sur I soit décroissante sur I.*

On définit de manière analogue la stricte monotonie d'une fonction.

Remarque : Concrètement, il peut être plus judicieux de retenir tout cela sous la forme : une fonction croissante conserve les inégalités, une fonction décroissante renverse le sens des inégalités.

Exercice : Prouver que si $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction strictement monotone sur X, alors f est injective de X sur $\mathbb{R}$.

Solution :

► Supposons que f soit strictement croissante sur X, et considérons deux réels $a, b \in X$. Si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$, et si $b < a$ alors $f(b) < f(a)$. Donc, dans tous les cas, on a $f(a) \neq f(b)$. Et ainsi, f est injective de X sur $\mathbb{R}$.

On raisonne de la même façon dans le cas où f est strictement décroissante sur X. ◄

Exercice : Prouver que si $f : X \to Y$ est une bijection strictement croissante (resp. décroissante) sur X, alors f^{-1} est également strictement croissante (resp. décroissante) sur Y.

Solution :

► Supposons que f soit une bijection strictement croissante. Soient $a, b \in Y$ avec $a < b$. Soient $x, y \in X$ tels que $f(x) = a$ et $f(y) = b$. Alors, $f^{-1}(a) = x$ et $f^{-1}(b) = y$. Or, puisque $a < b$, c'est donc que $f(x) < f(y)$. Et, comme f conserve le sens des inégalités strictes, c'est donc que $x < y$. C.à.d. $f^{-1}(a) < f^{-1}(b)$, ce qui assure que f^{-1} est strictement croissante sur Y.

On traite de la même manière le cas où f est strictement décroissante. ◄

Exercice : Déterminer toutes les fonctions f strictement croissantes sur $\mathbb{R}$, telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $f(f(x)) = x$.

Solution :

▶ Il est facile de vérifier que la fonction définie par $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est bien une solution du problème. On va prouver que c'est la seule.

Soit donc f une solution du problème. Supposons qu'il existe un réel a tel que $f(a) \neq a$.

- Si $f(a) < a$ alors, puisque f est strictement croissante, on a $f(f(a)) < f(a)$, et donc $a < f(a)$ ce qui est absurde.

- Si $f(a) > a$ alors, de la même façon, $f(f(a)) > f(a)$, et donc $a > f(a)$ ce qui est également absurde.

Ainsi, dans tous les cas, on obtient une contradiction, ce qui assure que pour tout a, on a bien $f(a) = a$. ◀

Définition 5 *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est* paire *(resp.* impaire*) si :*

a) Pour tout $x \in X$, on a $(-x) \in X$.

b) Pour tout $x \in X$, on a $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$).

Exemples : - La fonction f définie par $f(n) = n^2$ pour tout entier $n \geqslant 0$ n'est pas paire, car son ensemble de définition ici est $\mathbb{N}$, ce qui entraine que la condition a) n'est pas satisfaite.

- Par contre, la fonction f définie par $f(n) = n^2$ pour tout entier n est paire.

- La fonction f définie, pour tout entier n par $f(n) =$ nombre de diviseurs premiers de n est paire.

Exercice (Australie 1990) : Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(2x) = f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y\right)\right) + f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}y\right)\right)$$

et

$$f(x^2 - y^2) = (x+y)f(x-y) + (x-y)f(x+y)$$

Solution :

▶ Soit f une solution éventuelle.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$. En choisissant $y = 0$, avec la première condition il vient :

$$f(2x) = 2f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)$$

Et pour $y = 2$, on obtient cette fois (en remplaçant x par $-x$) :

$$f(-2x) = f\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}x + \pi\right)\right) + f\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}x - \pi\right)\right) = 2f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) = f(2x)$$

Par suite, f est paire.

Pour tout $y \in \mathbb{R}$. Si maintenant on choisit $x = 0$, la deuxième condition conduit alors à :

$$f(-y^2) = yf(-y) - yf(y) = y(f(-y) - f(y)) = 0$$

On en déduit que f coïncide avec la fonction nulle sur $\mathbb{R}^-$. Et puisque f est paire, c'est donc que f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Réciproquement, la fonction nulle satisfait les conditions du problème, et est donc bien une solution. ◀

Définition 6 *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $T > 0$ un réel. On dit que f est T-*périodique *(ou* périodique de période *T) lorsque :*

a) Pour tout $x \in X$, on a $x + T \in X$

b) Pour tout $x \in X$, on a $f(x) = f(x + T)$

Exercice (OIM 1968) : Soit a un réel. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x :

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2}$$

a) Prouver que f est périodique.

b) Pour $a = 1$, donner un exemple d'une telle fonction.

Solution :

▶ **a)** Soit f une telle fonction. Notons que, d'après l'équation fonctionnelle et pour que tout cela ait bien un sens, on a $\frac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit $g : x \mapsto f(x) - \frac{1}{2}$. Alors, pour tout réel x, $0 \leqslant g(x) \leqslant \frac{1}{2}$. De plus, d'après l'équation fonctionnelle :

$$g(x+a) = \sqrt{\frac{1}{4} - (g(x))^2}$$

Par suite $(g(x+a))^2 = \frac{1}{4} - (g(x))^2$, et donc

$$(g(x+2a))^2 = \frac{1}{4} - (g(x+a))^2 = (g(x))^2$$

Comme tout est positif, il vient $g(x+2a) = g(x)$, c.à.d. $f(x+2a) = f(x)$, ce qui assure que f est $2a$-périodique.

b) On peut par exemple choisir $f : x \mapsto \frac{1}{2}\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right| + \frac{1}{2}$. ◀

2 Premiers conseils

On ne dispose pas de théorèmes ou de résultats généraux pour résoudre des équations fonctionnelles (alors qu'il en existe pour les équations algébriques du second degré par exemple). Cependant, on peut dégager quelques principes généraux. Les nombreux exercices qui suivent en montreront l'utilité.

• Chercher des solutions particulières simples : fonctions constantes, affines, polynômes.

Cela permet de mieux appréhender une équation fonctionnelle, et de se faire une idée des solutions. En particulier, de savoir s'il y en a...

• Déterminer des valeurs particulières pour $f(x)$, par exemple $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f(2)$, etc.

Notons que si $f(0)$ ou $f(1)$ ne peut être déterminé, il peut être judicieux de le considérer comme un paramètre.

• Etudier les propriétés des solutions éventuelles : injectivité, surjectivité, bijectivité, parité, monotonie, signe, périodicité...

• Exploiter les symétries éventuelles de l'équation fonctionnelle.

L'idée générale étant de dégager suffisamment de contraintes sur les solutions éventuelles de l'équation fonctionnelle pour limiter le nombre de candidats-solutions, et se ramener à de simples vérifications. Attention toutefois à ne pas oublier les réciproques!

Exercice (Slovénie 1999) : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y :

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y$$

Solution :

▶ Soit f une éventuelle solution. Alors, en choisissant $y = 0$ et $x = a + f(0)$, l'équation fonctionnelle s'écrit $f(a) = -a + 1 - f(0)$, pour tout réel a. C.à.d. f est de la forme $x \mapsto -x + k$, où k est une constante réelle.

Réciproquement, soient $k \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto -x+k$. Pour tous réels x, y on a $f(x-f(y)) = -x - y + 2k$. Donc, f est une solution du problème si et seulement si $k = \frac{1}{2}$.

Finalement, il y a une unique solution qui est $f : x \mapsto -x + \frac{1}{2}$. ◀

Exercice : Déterminer toutes les fonctions à pente constante, c.à.d. les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe un réel a tel que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x \neq y$, on ait $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = a$.

Solution :

▶ Intuitivement, on peut prévoir qu'il s'agit des fonctions affines. Prouvons-le.

Soit f une fonction à pente constante, égale à a. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x \neq y$, on a donc $f(x) - f(y) = a(x - y)$. Et, on peut remarquer que cette relation reste vraie même si $x = y$. Par suite, en choisissant $y = 0$, on en déduit que, pour tout réel x, on a : $f(x) = ax + f(0)$, ce qui assure que f est affine.

Réciproquement, il est facile de vérifier qu'une fonction affine est bien solution du problème. ◀

Exercice : Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x + y) = x + f(y)$$

Solution :

▶ - *Première méthode* : En choisissant $y = 0$ il vient $f(x) = x + f(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Réciproquement, toute fonction de la forme $f : x \mapsto x + c$, où c est une constante réelle est clairement solution du problème.

- *Deuxième méthode* : Le membre de gauche de l'équation fonctionnelle est symétrique en x et y, donc le membre de droite doit l'être aussi. Par suite, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $x + f(y) = y + f(x)$. Ce qui conduit à $f(y) - f(x) = y - x$, et montre ainsi que f est à pente constante. L'exercice précédent permet d'affirmer que f est affine, de pente égale à 1. La réciproque est à nouveau immédiate. ◀

Exercice : Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$:

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Solution :

▶ Il est clair que les fonctions linéaires sont des solutions du problème. On va prouver que ce sont les seules. Soit f une fonction vérifiant les conditions du problème.

- *Détermination de valeurs particulières.*

Pour $x = y = 0$, il vient immédiatement $f(0) = 0$. Par contre, on ne peut déterminer $f(1)$ (ce qui est normal, puisque l'on a vu que toutes les fonctions linéaires convenaient). Posons donc $f(1) = a$.

Mais alors $f(2) = f(1+1) = f(1)+f(1) = 2a$. De même $f(3) = f(2+1) = f(2)+f(1) = 3a$. Et de façon générale, puisque pour tout $x \in \mathbb{Q}$ on a $f(x+1) = f(x)+a$, une récurrence sans difficulté conduit à $f(n) = an$, pour tout entier $n \geqslant 0$.

- *Parité.*

De $f(0) = 0$, on déduit que, pour tout rationnel x, on a $f(x) + f(-x) = f(0) = 0$, ce qui assure que f est impaire. Par suite, la relation $f(n) = an$ est valable pour tout entier n.

Il ne reste plus qu'à étendre cette relation à tous les rationnels. Pour cela, il suffit de remarquer que, par une nouvelle récurrence immédiate (sur n), l'équation fonctionnelle conduit à $f(nx) = nf(x)$ pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout rationnel x. Dans ces conditions, pour tous entiers p, q avec $q > 0$, on a :

$$ap = f(p) = f\left(q \times \frac{p}{q}\right) = qf\left(\frac{p}{q}\right)$$

d'où $f\left(\frac{p}{q}\right) = a\frac{p}{q}$.

Ce qui assure que f est bien linéaire sur $\mathbb{Q}$. ◀

3 Équations fonctionnelles sur $\mathbb{N}$, sur $\mathbb{Z}$, sur $\mathbb{Q}$

Certaines équations fonctionnelles portent sur des fonctions définies sur les entiers (ou les rationnels). L'exercice ci-dessus a montré comment ce type de contrainte pouvait jouer un rôle fondamental dans la résolution (utilisation possible de la récurrence). Il peut également arriver que l'on impose aux solutions d'être également à valeurs entières, ce qui limite d'autant les solutions possibles.

De façon générale, toute contrainte imposée aux solutions éventuelles doit être considérée comme une information supplémentaire, voire comme une arme à notre disposition pour nous aider dans la résolution de l'équation.

En particulier, on peut remarquer qu'une fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ est affine si et seulement si, pour tout entier n, on a $f(n+1) - f(n) = f(n) - f(n-1)$. En effet, on déduit facilement par deux récurrences (l'une pour les entiers positifs, l'autre pour les négatifs) que d'après la relation ci-dessus, pour tout entier n, on a $f(n) = n(f(1) - f(0)) + f(0)$. La réciproque étant immédiate.

Le résultat reste vrai pour les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ ou $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, à des contraintes près sur $f(0)$ et $f(1)$.

Exercice (d'après proposition OIM 1988) : Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que, pour tous $x, y \in \mathbb{N}$:

$$f(f(n) + f(m)) = n + m$$

Solution :

▶ Soit f une solution éventuelle.

- On remarque tout d'abord que f est injective. En effet, si m, n sont deux entiers naturels tels que $f(m) = f(n)$, alors $n + m = f(f(n) + f(m)) = f(f(n) + f(n)) = n + n$. D'où $n = m$.

- Etudions la pente de f. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $f(f(n) + f(n)) = 2n = (n-1) + (n+1) = f(f(n-1) + f(n+1))$. L'injectivité de f conduit alors à $f(n) + f(n) = f(n-1) + f(n+1)$. La remarque ci-dessus, permet alors d'affirmer que f est affine.

- Réciproquement, parmi les fonctions affines, il est facile de vérifier que la seule solution du problème est celle définie par $f(n) = n$ pour tout n. ◀

Exercice (Putnam 1963) : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissantes telles que $f(2) = 2$ et, pour tous entiers m, n premiers entre eux :

$$f(mn) = f(m)f(n)$$

Solution :

▶ Soit f une solution éventuelle. Puisque f est strictement croissante, on a $0 \leqslant f(0) < f(1) < f(2) = 2$, d'où $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

On pose $f(3) = 3+k$, où $k \in \mathbb{N}$. Alors $f(6) = f(2)f(3) = 6+2k$. D'où $f(5) \leqslant 5+2k$. Par suite $f(10) = f(2)f(5) \leqslant 10+4k$, d'où $f(9) \leqslant 9+4k$ et $f(18) \leqslant 18+8k$. Et ainsi, $f(15) \leqslant 15+8k$. Mais, d'autre part, on a $f(5) \geqslant 5+k$ donc $f(15) = f(3)f(5) \geqslant (5+k)(3+k)$. On en déduit que $(5+k)(3+k) \leqslant 15+8k$, ce qui conduit facilement à $k = 0$ et $f(3) = 3$.

Prouvons maintenant par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $f(2^n + 1) = 2^n + 1$.

- On vient de voir que ce résultat est vrai pour $n = 1$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé. On suppose que $f(2^n + 1) = 2^n + 1$. Alors :

$$f\left(2^{n+1} + 2\right) = f(2)f\left(2^n + 1\right) = 2^{n+1} + 2$$

De plus, puisque f est strictement croissante, elle est injective, et donc les nombres $f(2^n + 2), f(2^n + 3), \ldots, f(2^{n+1} + 2)$ sont deux à deux distincts, classés dans cet ordre, et appartiennent à $\{2^n+2, \ldots, 2^{n+1}+2\}$. Par suite, $f(2^n+i) = 2^n+i$ pour tout $i \in \{2, 3, ..., 2^n+2\}$, ce qui prouve en particulier que $f\left(2^{n+1} + 1\right) = 2^{n+1} + 1$ et achève la récurrence.

Le même argument combinatoire permet alors de déduire que $f(n) = n$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

Réciproquement, l'identité est bien une solution du problème. ◀

Mais, l'ensemble des entiers naturels possède une propriété fondamentale (que nous admettrons ici) :

Propriété 1

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Et, comme nous allons le voir, cette propriété peut nous être bien utile...

Exercice (Roumanie 1986) : Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ surjective, et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $f(n) \geqslant g(n)$. Prouver que $f = g$.

Solution :

▶ Par l'absurde : supposons qu'il existe un entier a tel que $f(a) \neq g(a)$.

Alors, l'ensemble $A = \{n \,/\, f(n) \neq g(n)\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, et donc l'ensemble $B = \{g(n),\ n \in A\}$ est lui aussi une partie non vide de $\mathbb{N}$. Cet ensemble B admet donc un plus petit élément, noté $g(b)$, avec $b \in A$. Notons qu'alors $g(b) < f(b)$.

Puisque f est surjective, il existe un entier c tel que $f(c) = g(b) < f(b)$. Et, en particulier, on a $c \neq b$. Puisque g est injective, on a alors $g(c) \neq g(b) = f(c)$, d'où $c \in A$ et $g(c) < f(c) = g(b)$, ce qui contredit la minimalité de $g(b)$.

Donc, pour tout entier a, on a $f(a) = g(a)$. ◀

Exercice (Concours Général 1995) : Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective. Prouver qu'il existe trois entiers naturels a, b, c tels que $a < b < c$ et $f(a) + f(c) = 2f(b)$.

Solution :

▶ Soit f une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$. Alors, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(0) < f(n)$ (sans quoi, $f(0) + 1$ par exemple n'aurait pas d'antécédant par f).

Cela nous permet d'affirmer que l'ensemble $E = \{n \in \mathbb{N} / \, f(0) < f(n)\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$ qui, par conséquent, admet un plus petit élément, que l'on va noter b. Par suite, on a $0 < b$ et $f(0) < f(b)$.

Soit $n = 2f(b) - f(0)$. Puisque f est bijective, il existe donc un entier c tel que $f(c) = n$. Ainsi, on a $f(c) + f(0) = 2f(b)$. De plus $f(c) = f(b) + (f(b) - f(0)) > f(b) > f(0)$, ce qui assure que $c \in E$. Le caractère minimal de b conduit alors à $b < c$.

Ainsi, en posant $a = 0$, il vient $a < b < c$ et $f(a) + f(c) = 2f(b)$. ◀

4 La continuité

Définition 7 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, où I désigne une réunion d'intervalles de longueurs non nulles de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$.*

La fonction f est dite continue *en a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.*

Si f est continue en a pour tout $a \in I$, on dit que f est continue *sur I.*

Dans ce qui suit, si l'on parle de continuité sans préciser le domaine, celle-ci est implicitement supposée sur l'ensemble de définition sur lequel on résout l'équation fonctionnelle.

Une caractérisation pratique de la continuité est donnée dans la propriété suivante (que nous admettrons ici) :

Propriété 2

Avec les notations précédentes :

La fonction f est continue en a si et seulement si, pour toute suite (x_n) qui converge vers a, on a $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$.

Exercice (Bulgarie 1997) : Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et telles que, pour tout réel x :

$$f(x) = f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)$$

Solution :

▶ Soit f une solution éventuelle. Il est clair que f est paire.

Soit $g : x \mapsto x^2 + \frac{1}{4}$. Il est facile de vérifier que, pour tout $a \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, on a :

$$a \leqslant g(a) \leqslant \frac{1}{2} \tag{1}$$

et que, pour tout $a \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right[$, on a :

$$\frac{1}{2} \leqslant g(a) \leqslant a \tag{2}$$

- Soit $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Considérons la suite (x_n) définie par $x_0 = x$ et $x_{n+1} = g(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après l'équation fonctionnelle, on a donc $f(x_{n+1}) = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c.à.d. la suite $(f(x_n))$ est constante.

D'autre part, d'après (1), la suite (x_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$. Elle converge donc vers une certaine limite L qui, par continuité de g, vérifie $g(L) = L$. D'où $L = \frac{1}{2}$.

La continuité de f assure donc que $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f\left(\frac{1}{2}\right)$. Et, comme la suite $(f(x_n))$ est constante, on a donc $f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$, ce qui assure que f est elle-même constante sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

- Soit maintenant $x \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right[$. On prouve comme ci-dessus que $f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$, ce qui entraine que f est constante sur $\left[-\frac{1}{2}, \infty\right[$.

La parité de f assure alors qu'elle est constante sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Réciproquement, il est facile de vérifier que les fonctions constantes sont bien des solutions du problème. ◀

L'exercice précédent montre comment il est possible d'utiliser la continuité afin de résoudre des équations fonctionnelles. Dans la pratique, il est souvent très utile de connaître la propriété suivante, qui permet, sous hypothèse de continuité (ou de monotonie), d'étendre à l'ensemble des réels des résultats obtenus sur les rationnels et, accessoirement, de faire le lien avec le paragraphe précédent.

Propriété 3

L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est dense dans $\mathbb{R}$. C.à.d. tout réel est la limite d'une suite de rationnels. Plus précisément, tout réel est la limite d'une suite croissante de rationnels et la limite d'une suite décroissante de rationnels.

Preuve :

▶ On note $[a]$ la partie entière du réel a. Alors $[a] \leqslant a < [a] + 1$.

À l'aide du théorème des gendarmes, il est facile d'en déduire que $\lim_{a \to \infty} \frac{[a]}{a} = \lim_{a \to -\infty} \frac{[a]}{a} = 1$.

Soit x un réel positif. Pour tout entier $n > 0$, on pose $x_n = \frac{[10^n x]}{10^n}$ et $x'_n = \frac{[10^n x]+1}{10^n}$. Ainsi, x_n et x'_n sont respectivement les valeurs approchées de x à 10^{-n} près par défaut et par excès.

Il est clair qu'alors $x_n, x'_n \in \mathbb{Q}$, que la suite (x_n) est croissante et que (x'_n) est décroissante. De plus, d'après ci-dessus, il vient $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} x'_n = x$.

Si x est négatif, on construit les suites (x_n) et (x'_n) comme ci-dessus mais associées à $(-x)$. Les suites $(-x_n)$ et $(-x'_n)$ conviennent alors pour x ◀

La stratégie est maintenant claire. Pour illustrer notre propos, l'exercice suivant est incontournable et l'équation fonctionnelle est connue sous le nom d'*équation de Cauchy* :

Exercice : Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continues (resp. monotones), et telles que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Solution :

▶ On a vu prédemment que, si f est une solution du problème alors, pour tout rationnel q, on a $f(q) = qf(1)$.

- Si f est supposée continue. Soit x un réel, et (x_n) une suite de rationnels qui converge vers x. On a donc $f(x_n) = x_n f(1)$ pour tout n, et donc $\lim_{n\rightarrow+\infty} f(x_n) = xf(1)$. Or, puisque f est continue en x, on a $\lim_{n\rightarrow+\infty} f(x_n) = f(x)$. D'où $f(x) = xf(1)$. Ce qui assure que f est linéaire sur $\mathbb{R}$.

- Si f est supposée monotone, par exemple croissante (le cas f décroissante se traite de façon analogue). Soit x un réel. Soient (x_n) une suite croissante de rationnels et (x'_n) une suite décroissante de rationnels, qui convergent toutes les deux vers x. Alors, pour tout entier $n \geqslant 0$, $x_n \leqslant x \leqslant x'_n$. Et, puisque f est croissante, on a donc

$$x_n f(1) = f(x_n) \leqslant f(x) \leqslant f\left(x'_n\right) = x'_n f(1)$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, il vient $xf(1) \leqslant f(x) \leqslant xf(1)$, d'où $f(x) = xf(1)$. Et, à nouveau, f doit être linéaire sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement, dans les deux cas, il est facile de vérifier que toutes les fonctions linéaires sont bien des solutions du problème. ◀

Remarques : - La question de l'existence de solutions de l'équation fonctionnelle précédente qui ne seraient pas continues, ou non monotones, est difficile. Pour ceux qui en auraient entendu parlé, on peut prouver que, sous réserve d'admettre l'axiome du choix, il existe effectivement d'autres solutions que celles ci-dessus.

- Bien entendu, la démarche ci-dessus n'est pas limitée aux rationnels, mais s'adapte à tout sous-ensemble dense de l'ensemble de définition des fonctions utilisées.

- Précisons enfin que ce résultat est à connaître parfaitement car, comme on le verra, de nombreuses équations fonctionnelles s'y ramènent.

Exercice (Suède 1962) : Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x et tout rationnel r :

$$|f(x) - f(r)| \leqslant 7(x-r)^2$$

Solution :

▶ Evidemment, là, c'est plutôt d'une inéquation fonctionnelle qu'il s'agit. Mais bon, ne chipotons pas...

Soit f une solution éventuelle. Soient a, b deux rationnels, et $n > 0$ un entier. Pour $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on pose $a_i = a + i\frac{b-a}{n}$. Il est clair que tous les a_i sont rationnels et que $a_{i+1} - a_i = \frac{b-a}{n}$ pour $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Par suite, d'après l'inégalité triangulaire :

$$|f(a) - f(b)| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |f(a_i) - f(a_{i+1})| \leqslant 7 \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)^2 = \frac{7(b-a)^2}{n}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que $f(a) = f(b)$. Par suite, la fonction f est constante sur $\mathbb{Q}$.

Soit $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(r) = c$ pour tout rationnel r. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la propriété 3, il existe une suite (r_n) de rationnels qui converge vers x et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $|x - r_n| \leqslant \frac{1}{10^n}$. Alors :

$$|f(x) - c| = |f(x) - f(r_n)| \leqslant 7(x - r_n)^2 \leqslant \frac{7}{10^{2n}}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que $f(x) = c$, et donc que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement, il est facile de vérifier que les fonctions constantes sont bien des solutions du problème. ◀

Les différentes notions que l'on a introduites jusqu'à présent ne sont pas toujours indépendantes les unes des autres. La propriété suivante, que nous ne démontrerons pas ici pour ne pas trop alourdir l'exposé, donne quelques liens utiles :

Propriété 4

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

a) Si f est continue et strictement monotone sur I alors $f(I)$ est un intervalle, et f est une bijection de I sur $f(I)$.

b) Si f est bijective et strictement monotone sur I alors f est continue sur I.

c) Si f est continue sur I et bijective de I sur $f(I)$ alors f est strictement monotone sur I.

5 Conseils et méthodes

Les remarques du 2 restent toujours valables, mais on peut envisager d'autres moyens pour attaquer une équation fonctionnelle.

5.1 Changements de variables

Deux types de changements de variables s'offrent à nous : on peut jouer sur les réels $x, y, \ldots$ qui interviennent dans l'équation fonctionnelle, ou sur les fonctions elles-mêmes.

Voyons deux exemples :

Exercice : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

a) Pour tous réels x, y, $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Solution :

▶ Soit f une solution éventuelle du problème. En posant $a = x - y$, on déduit de a) que, pour tout a, y réels :

$$f(a + 2y) + f(a) = 2f(a + y)f(y)$$

Fixons a et faisons tendre y vers $+\infty$, la condition b) conduit alors à $f(a) = 0$. Par suite, f est la fonction nulle.

Réciproquement, il est clair que la fonction nulle est bien solution du problème. ◀

Exercice (Croatie 1996) : Soit $t \in]0,1[$. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues en 0 telles que, pour tout réel x :

$$f(x) - 2f(tx) + f\left(t^2 x\right) = x^2$$

Solution :

▶ Soit f une solution éventuelle du problème. On pose $g : x \mapsto f(x) - f(tx)$. Il est clair que g est continue en 0, et que $g(0) = 0$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) - g(tx) = x^2$. Par suite, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\begin{array}{rcl} g(tx) - g\left(t^2 x\right) & = & t^2 x^2 \\ & \vdots & \\ g\left(t^{n-1} x\right) - g\left(t^n x\right) & = & t^{2(n-1)} x^2 \end{array}$$

En sommant membre à membre ces égalités, et puisque $t^2 \neq 1$, il vient :

$$g(x) - g\left(t^n x\right) = x^2 \left(1 + t^2 + \ldots + t^{2(n-1)}\right) = x^2 \frac{1 - t^{2n}}{1 - t^2}$$

On fait alors tendre n vers $+\infty$. Puisque, $t^2 \in]0,1[$ et que $\lim\limits_{a \to +\infty} g(a) = g(0) = 0$, on en déduit que pour tout réel x, $g(x) = \frac{x^2}{1-t^2}$, c.à.d. $f(x) - f(tx) = \frac{x^2}{1-t^2}$.

En procédant comme ci-dessus, on obtient que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$f(x) - f\left(t^n x\right) = \frac{x^2}{1 - t^2} \left(1 + t^2 + \ldots + t^{2(n-1)}\right) = x^2 \frac{1 - t^{2n}}{\left(1 - t^2\right)^2}$$

Et, en faisant tendre n vers $+\infty$, il vient $f(x) - f(0) = \frac{x^2}{\left(1-t^2\right)^2}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
C.à.d. f est de la forme $x \mapsto \frac{x^2}{\left(1-t^2\right)^2} + k$ où k est une constante réelle.

Il n'est pas difficile de vérifier que, réciproquement, toute fonction de cette forme est bien une solution du problème. ◀

5.2 Itérées d'une fonction

Définition 8 *Soit $f : X \rightarrow X$ une fonction. La suite des* itérées *de f est la suite de fonctions $\left(f^n\right)_{n \geqslant 0}$, où, pour tout $x \in X$, $f^0(x) = x$, $f^1(x) = f(x)$ et pour tout $n \geqslant 1$, $f^{n+1}(x) = f\left(f^n(x)\right)$.*

Certaines équations fonctionnelles font apparaître des itérées. L'idée est alors parfois, pour un x fixé, de considérer la suite (x_n), où $x_n = f^n(x)$. L'ensemble de tous les x_n est appelé *l'orbite* de x par f. L'étude des propriétés de cette suite permet parfois d'en déduire des propriétés de f.

Rappelons que, pour l'étude de (x_n), on dispose par exemple du résultat suivant, que nous admettrons ici :

Propriété 5

Soit (U_n) une suite de complexes. Soient a, b deux complexes. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $U_{n+2} = aU_{n+1} + bU_n$.

a) *Si l'équation $X^2 = aX + b$ admet deux racines distinctes α et β, alors il existe deux constantes complexes λ et μ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \lambda\alpha^n + \mu\beta^n$.*
b) *Si l'équation $X^2 = aX + b$ admet une racine double α, alors il existe deux constantes complexes, λ et μ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = (\lambda n + \mu)\alpha^n$.*

Remarque : Cette propriété se généralise aux suites (U_n) qui vérifient une relation de récurrence de la forme

$$U_{n+k} = a_1 U_{n+k-1} + a_2 U_{n+k-2} + \ldots + a_k U_n$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sont des constantes.

Dans ce cas, on montre en particulier que si l'équation $X^k = a_1 X^{k-1} + a_2 X^{k-2} + \ldots + a_k$ admet k solutions distinctes, notées $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, alors il existe des constantes $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ telles que, pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$U_n = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \alpha_i^n$$

Exercice (Proposé OIM 1992) : Soient $a, b \in \mathbb{R}^{+\star}$. Prouver qu'il existe une unique fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$f(f(x)) + af(x) = b(a+b)x$$

Solution :
▶ Soit f une solution éventuelle. L'équation fonctionnelle portant sur des itérées, il peut être judicieux de considérer la suite (x_n) définie par $x_0 = x$ un réel donné et, pour tout entier $n \geqslant 0$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Alors $x_{n+2} + ax_{n+1} - b(a+b)x_n = 0$.

C'est une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 et à coefficients constants. L'équation $X^2 + aX - b(a+b) = 0$ admet deux solutions distinctes qui sont b et $-(a+b)$. Il existe donc des constantes λ, μ telles que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $x_n = \lambda b^n + \mu(-1)^n(a+b)^n$.

Si $\mu \neq 0$ alors, puisque a et b appartiennent à $\mathbb{R}^{+\star}$, on a $|b^n| \leqslant |(-1)^n(a+b)^n|$ et donc pour n suffisamment grand il serait possible d'avoir $x_n < 0$, en contradiction avec l'hypothèse que f est à valeurs positives. Donc $\mu = 0$.

Mais alors, pour $n = 0$ et $n = 1$, il vient respectivement $x_0 = x = \lambda$ et $x_1 = f(x) = \lambda b$, d'où $f(x) = bx$. Cela assure l'unicité.

Réciproquement, il est facile de vérifier que la fonction $f : x \mapsto bx$ est bien une solution du problème. ◀

Exercice : Déterminer toutes les fonctions $f : [0,1] \to [0,1]$ telles que, pour tout réel $x \in [0,1]$,

$$f(2x - f(x)) = x$$

Solution :
▶ Soit f une solution éventuelle. Puisque f est définie sur $[0,1]$, on note qu'alors, pour tout $x \in [0,1]$, on a $2x - f(x) \in [0,1]$. Posons $g : x \mapsto 2x - f(x)$. La fonction g est donc définie et à valeurs sur $[0,1]$. De plus, pour tout $x \in [0,1]$, on a $f(g(x)) = x$.

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note g^n la n-ième itérée de g. Pour $x \in [0,1]$, on a $g(g(x)) = 2g(x) - f(g(x)) = 2g(x) - x$. Par une récurrence sans difficulté en prouve alors que pour tous $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $g^n(x) = ng(x) - (n-1)x = n(g(x) - x) + x$.

Supposons qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $g(x_0) \neq x_0$. Si $g(x_0) - x_0 > 0$ alors, d'après ci-dessus, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} g^n(x_0) = +\infty$, ce qui contredit que g est bornée. On obtient la même contradiction si $g(x_0) - x_0 < 0$. Par suite, pour tout $x \in [0,1]$, on a $g(x) = x$, c.à.d. $f(x) = x$.

Réciproquement, on vérifie facilement que l'identité est bien une solution du problème. ◀

Exercice (OIM 1987) : Prouver qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}^\star$ telle que, pour tout entier $n > 0$,

$$f(f(n)) = n + 1987$$

Solution :

▶ Par l'absurde : supposons que f soit une fonction vérifiant les conditions de l'énoncé. On pose $g = f \circ f$.

On commence par remarquer que f est injective : en effet, si $a, b \in \mathbb{N}^\star$ tels que $f(a) = f(b)$ alors $a + 1987 = f(f(a)) = f(f(b)) = b + 1987$, d'où $a = b$.

De plus, pour tout entier $n > 0$, on a $f(n) \neq n$ sans quoi, un éventuel point fixe de f (oui, bon d'accord, la définition de « point fixe » n'apparaît qu'au chapitre suivant...) conduirait à l'absurdité $n = n + 1987$.

Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, on note $O_k = \{g^n(k),\ n \in \mathbb{N}\}$ l'orbite de k par g (ici donc, g^n désigne la n-ième itérée de g). Alors, d'après l'équation fonctionnelle, on a $O_k = \{k + 1987n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Par suite, $\mathbb{N}^\star$ est la réunion disjointe des ensembles $O_1, O_2, \ldots, O_{1987}$.

En particulier, pour $k \in \{1, 2, \ldots, 1987\}$, il existe des entiers $n \in \{1, 2, \ldots, 1987\}$ et $m \geqslant 0$ tels que $f(k) = g^m(n)$. Et l'injectivité de f implique que soit $m = 0$ et $f(k) = n$, soit $m = 1$ et $f(k) = f(f(n)) = n + 1987$. Dans le second cas, on a alors $k = f(n)$. Cela permet d'affirmer que les entiers appartenant à $\{1, 2, ..., 1987\}$ peuvent être répartis en paires deux à deux disjointes de la forme $\{n, f(n)\}$. Or, ceci est clairement impossible puisque 1987 est impair. ◀

Remarque : Le même raisonnement peut-être utilisé si l'on remplace 1987 par n'importe quel entier $p > 0$ impair. Par contre, la fonction $f : x \mapsto x + p$ montre que, pour tout entier $p \geqslant 0$, il existe des solutions à l'équation fonctionnelle $f(f(n)) = n + 2p$.

5.3 Points fixes

Définition 9 *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $a \in X$. On dit que a est un* point fixe *de f lorsque $f(a) = a$.*

L'étude des points fixes des fonctions solutions est parfois le chemin vers la résolution du problème. Voyons immédiatement un exemple :

Exercice (OIM 1983) : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}^{+\star}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

a) pour tous réels x, y, $f(xf(y)) = yf(x)$,

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Solution :

▶ En cherchant un peu, on trouve assez vite que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est une solution du problème. On va prouver que c'est la seule. La forme de l'équation fonctionnelle et de la solution envisagée laisse prévoir que l'on va s'intéresser à des expressions du type $xf(x)$.

Soit f une solution éventuelle.

- Commençons par prouver que f est bijective. En effet, pour $x=1$, il vient $f(f(y)) = yf(1)$ pour tout $y>0$, et on sait que $f(1)>0$. On en déduit que si $a,b>0$ vérifient $f(a)=f(b)$, alors $af(1)=f(f(a))=f(f(b))=bf(1)$. Et donc $a=b$, ce qui assure que f est injective.

D'autre part, pour tout $y>0$, on a $f\left(f\left(\frac{y}{f(1)}\right)\right)=y$, ce qui assure que y admet un antécédant par f et qu'ainsi f est surjective.

- Etudions maintenant l'ensemble F des points fixes de f. Cette idée vient naturellement du choix $x=y$ dans l'équation fonctionnelle, puisqu'alors, pour tout $x>0$, on a $f(xf(x)) = xf(x)$. Ainsi, pour tout $x>0$, on a $xf(x)\in F$.

Mais, on peut remarquer également que $1\in F$. En effet, puisque f est bijective, on note c l'unique antécédant de 1 par f. Alors, d'après ci-dessus, on a $f(1)=f(1\times f(c))=cf(1)$. Comme $f(1)>0$, on a alors $c=1$, et donc $f(1)=f(c)=1$.

Il ne reste plus qu'à prouver que 1 est en fait le seul point fixe de f, puisqu'alors, pour tout $x>0$, on devra avoir nécessairement $xf(x)=1$. Pour cela, on va regarder d'un plus près cet ensemble F.

- On va commencer par prouver que F est stable par produit et passage à l'inverse. Soient $x,y\in F$. On a donc $f(x)=x$ et $f(y)=y$. Mais alors $f(xy)=f(xf(y))=yf(x)=yx$, ce qui assure que $xy\in F$. D'autre part, puisque $1\in F$, on a aussi, pour $x\in F$:

$$1=f\left(\frac{1}{x}\times x\right)=f\left(\frac{1}{x}f(x)\right)=xf\left(\frac{1}{x}\right)$$

ce qui assure que $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}$, et qu'ainsi $\frac{1}{x}\in F$.

On est maintenant en mesure d'atteindre notre objectif. En effet, considérons un éventuel point fixe $a\neq 1$. Si $a>1$ alors, puisque F est stable par produit, on en déduit que, pour tout entier $n\geqslant 0$, on a $f(a^n)=a^n$. Mais alors $\lim_{n\to+\infty} f(a^n)=+\infty$, ce qui contredit que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$. Et, si $0<a<1$, puisque F est stable par passage à l'inverse, le réel $b=\frac{1}{a}$ est aussi un point fixe, avec $b>1$, ce qui est impossible d'après ce que l'on vient de voir.

Donc 1 est le seul point fixe, et la conclusion en découle. ◀

5.4 Savoir exploiter des particularités

On l'a déjà dit, toute information sur la fonction est bonne à prendre, et certaines d'entre elles peuvent même indiquer des démarches possibles vers la solution : fonctions définies et/ou à valeurs sur les entiers, continuité, polynômes...

Dans ce dernier cas, justement : ne jamais oublier qu'un polynôme non nul n'admet qu'un nombre fini de racines.

Exercice (Putnam 1971) : Déterminer tous les polynômes P à coefficients réels tels que $P(0)=0$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$P\left(x^2+1\right)=(P(x))^2+1$$

Solution :
▶ Puisque $P(0) = 0$, on déduit que $P(1) = 1$, puis $P(2) = 2$ et $P(5) = 5$, etc. L'idée est alors de considérer la suite (a_n) définie par $a_0 = 0$ et, pour tout entier $n \geqslant 0$, $a_{n+1} = a_n^2 + 1$. Une récurrence sans difficulté montre qu'alors la suite (a_n) est strictement croissante et que pour tout entier $n \geqslant 0$, $P(a_n) = a_n$.

Cela entraine que le polynôme Q, défini par $Q(x) = P(x) - x$, admet une infinité de racines distinctes, et est donc le polynôme nul. C.à.d. $P(x) = x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La réciproque est immédiate. ◀

5.5 Séparer les variables

Beaucoup d'équations fonctionnelles relient des valeurs des fonctions inconnues, en faisant intervenir simultanément des nombres du type $f(x), f(y), \ldots$. On a déjà signalé qu'il était souvent extrêmement utile de chercher des symétries en ces différentes variables, quitte parfois à les créer en choisissant des valeurs adéquates (par exemple, remplacer y par $f(y)$).

Il peut-être également parfois judicieux d'essayer de séparer les termes portant sur x de ceux qui portent sur y.

Voyons tout de suite un exemple :

Exercice (Proposé OIM 1994) : Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels $x, y \geqslant 0$,

$$f(x)f(y) = y^\alpha f\left(\frac{x}{2}\right) + x^\beta f\left(\frac{y}{2}\right)$$

Solution :
▶ Soit f une solution éventuelle.

- Pour $x = y = 0$, il vient $f(0) = 0$.

- Le membre de gauche de l'équation fonctionnelle étant symétrique en x et y, celui de droite doit l'être également. Par suite, pour tous réels $x, y \geqslant 0$, on a :

$$y^\alpha f\left(\frac{x}{2}\right) + x^\beta f\left(\frac{y}{2}\right) = x^\alpha f\left(\frac{y}{2}\right) + y^\beta f\left(\frac{x}{2}\right)$$

ou encore

$$\left(x^\alpha - x^\beta\right) f\left(\frac{y}{2}\right) = \left(y^\alpha - y^\beta\right) f\left(\frac{x}{2}\right)$$

- Si $\alpha \neq \beta$ alors, pour $x, y \in \mathbb{R}^{+\star} \backslash \{1\}$, on a :

$$\frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{x^\alpha - x^\beta} = \frac{f\left(\frac{y}{2}\right)}{y^\alpha - y^\beta}$$

ce qui montre que la fonction $x \mapsto \frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{x^\alpha - x^\beta}$ est constante sur $\mathbb{R}^{+\star} \backslash \{1\}$. Il existe donc un réel c tel que, pour tout réel $x \in \mathbb{R}^{+\star} \backslash \{\frac{1}{2}\}$,

$$f(x) = c\left(2^\alpha x^\alpha - 2^\beta x^\beta\right)$$

Dans ces conditions, l'équation fonctionnelle, pour $x, y \in \mathbb{R}^{+\star} \backslash \{\frac{1}{2}, 1\}$, conduit à :

$$c^2\left(2^\alpha x^\alpha - 2^\beta x^\beta\right)\left(2^\alpha y^\alpha - 2^\beta y^\beta\right) = cy^\alpha\left(x^\alpha - x^\beta\right) + cx^\beta\left(y^\alpha - y^\beta\right) = c\left(y^\alpha x^\alpha - x^\beta y^\beta\right)$$

Fixons y et considérons cette égalité comme une relation entre deux « polynômes » en x. La comparaison des coefficients de x^α conduit alors à $2^\alpha c^2 \left(2^\alpha y^\alpha - 2^\beta y^\beta\right) = cy^\alpha$ pour tout $y \in \mathbb{R}^{+\star} \backslash \{\frac{1}{2}, 1\}$. Considérant à nouveau cette égalité comme une égalité de « polynômes », le coefficient de y^β donne $c = 0$.

Par suite $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+ \backslash \{\frac{1}{2}, 1\}$. Mais, en choisissant $x = y = 1$ puis $x = y = 2$ dans l'équation fonctionnelle initiale, il vient respectivement $(f(1))^2 = 2f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $(f(2))^2 = \left(2^\alpha + 2^\beta\right) f(1) = 0$. D'où $f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, et f est la fonction nulle, qui réciproquement est bien solution du problème.

- Si $\alpha = \beta$ alors, pour $x = y$, l'équation fonctionnelle conduit à $f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}x^{-\alpha}(f(x))^2$. Ainsi, pour tous réels $x, y > 0$,

$$f(x)f(y) = \frac{1}{2}y^\alpha x^{-\alpha}(f(x))^2 + \frac{1}{2}x^\alpha y^{-\alpha}(f(y))^2$$

c.à.d. $\frac{f(x)}{x^\alpha} = \frac{f(y)}{y^\alpha}$, et donc, comme ci-dessus, il existe une constante c telle que, pour tous réel $x \geqslant 0$, $f(x) = cx^\alpha$. L'équation fonctionnelle s'écrit alors :

$$c^2 x^\alpha y^\alpha = 2c\left(\frac{xy}{2}\right)^\alpha$$

pour tous réels $x, y \geqslant 0$. La même démarche que ci-dessus montre qu'alors $c = 0$ ou $c = 2^{1-\alpha}$.

Réciproquement, la fonction nulle et la fonction $x \mapsto 2\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha$ sont bien des solutions du problème. ◀

6 Exercices

Attention ! Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté croissante...

Exercice 1 (Crux Mathematicorum 2003).
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x :

$$f\left(x^3 + x\right) \leqslant x \leqslant (f(x))^3 + f(x)$$

Exercice 2.
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ bornées et telles que, pour tous entiers n, k :

$$f(n+k) + f(k-n) = 2f(k)f(n)$$

Exercice 3 (Équation de Jensen).
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et telles que, pour tous réels x, y :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Exercice 4 (D'après proposition OIM 1989).
Déterminer les réels a pour lesquels il existe une fonction $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ continue et vérifiant les conditions suivantes :
i) $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
ii) pour tous $x, y \in [0;1]$ avec $x \leqslant y$, on a $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = (1-a)f(x) + af(y)$.

Exercice 5 (OIM 1990).
Construire une fonction $f : \mathbb{Q}^{+\star} \to \mathbb{Q}^{+\star}$ telle que, pour tous $x, y \in \mathbb{Q}^{+\star}$:

$$f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}$$

Exercice 6 (D'après proposition OIM 1991).
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que, pour tous entiers m, n :

$$f(m + f(f(n))) = -f(f(m+1)) - n$$

Exercice 7 (Iran 1999).
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y,

$$f(f(x) + y) = f\left(x^2 - y\right) + 4yf(x)$$

Exercice 8.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et telle que, pour tous réels x, y :

$$f(x+y)f(x-y) = (f(x))^2$$

Prouver que f est identiquement nulle ou que f ne s'annule pas.

Exercice 9 (Proposé OIM 1996).
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, on ait $|f(x)| \leqslant 1$ et

$$f\left(x + \frac{13}{42}\right) + f(x) = f\left(x + \frac{1}{6}\right) + f\left(x + \frac{1}{7}\right)$$

Prouver que f est périodique.

Exercice 10 (Irlande 1999).
Soit $f : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}^\star$ telle que
i) pour tous entiers a et b premiers entre eux $f(ab) = f(a)f(b)$
ii) pour tous nombres premiers p, q, $f(p+q) = f(p) + f(q)$
Prouver que $f(2) = 2$, $f(3) = 3$ et $f(1999) = 1999$.

Exercice 11 (Corée 1999).
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tout réel $x \notin \{-1, 1\}$:

$$f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) + f\left(\frac{3+x}{1-x}\right) = x$$

Exercice 12 (OIM 1982).
Soit $f : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}^\star$ vérifiant les conditions suivantes :
i) pour tous entiers $m, n > 0$, $f(m+n) - f(m) - f(n) \in \{0, 1\}$
ii) $f(2) = 0$, $f(3) > 0$ et $f(9999) = 3333$
Déterminer $f(1982)$.

Exercice 13 (Tournoi des villes 1996).
Prouver qu'il n'existe aucune fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, on ait $f(f(x)) = x^2 - 1996$.

Exercice 14 (Turquie 1999).
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :
i) l'ensemble $\left\{\frac{f(x)}{x}, x \in \mathbb{R}^\star\right\}$ soit fini
ii) pour tout réel x, $f(x - 1 - f(x)) = f(x) - x - 1$

Exercice 15 (D'après proposition OIM 1997).
Existe-t-il deux fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x :

$$f(g(x)) = x^2 \quad \text{et} \quad g(f(x)) = x^3$$

Exercice 16 (D'après proposition OIM 1995).
Existe-t-il une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant les trois conditions suivantes ?

i) il existe un réel $M > 0$ tel que, pour tout réel x, $-M \leqslant f(x) \leqslant M$
ii) $f(1) = 1$
iii) Si $x \neq 0$ alors,

$$f\left(x + \frac{1}{x^2}\right) = f(x) + \left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2$$

Exercice 17 (OIM 2002).
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y, z, t :

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$$

Exercice 18 (OIM 1992).
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y :

$$f\left(x^2 + f(y)\right) = y + (f(x))^2$$

Exercice 19 (OIM 1999).
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y :

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

Exercice 20 (OIM 1977).
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que, pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$f(n+1) > f(f(n))$$

Exercice 21 (OIM 1996).
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que, pour tous entiers $m, n \geqslant 0$:

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$$

Exercice 22 (Italie 1999).
a) Déterminer toutes les fonctions strictement monotones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y :

$$f(x + f(y)) = f(x) + y$$

b) Prouver que, pour tout entier $n > 1$, il n'existe pas de fonction strictement monotone $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y :

$$f(x + f(y)) = f(x) + y^n$$

Exercice 23 (Suisse 1999).
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x non nul :

$$\frac{1}{x} f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x$$

Exercice 24 (Vietnam 1999).
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que :
i) $f(0) = f(1) = 0$
ii) pour tous $x, y \in [0,1]$, on ait $2f(x) + f(y) = 3f\left(\frac{2x+y}{3}\right)$.
Prouver que $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$.

Exercice 25 (Autriche-Pologne 1997).
Prouver qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que, pour tous entiers x, y :

$$f(x + f(y)) = f(x) - y$$

Exercice 26 (Ukraine 1997).
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Q}^{+\star} \to \mathbb{Q}^{+\star}$ telles que, pour tout rationnel $x > 0$:

$$f(x+1) = f(x) + 1 \quad \text{et} \quad f\left(x^2\right) = (f(x))^2$$

Exercice 27.
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ et, pour tous réels x, y :

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$$

Exercice 28 (Irlande 1997).
Déterminer tous les polynômes P tels que, pour tout réel x :

$$(x - 16)P(2x) = 16(x-1)P(x)$$

Exercice 29 (Proposé OIM 1987).
Soit $f : \mathbb{R}^{+\star} \to R$ une fonction telle que, pour tout réel $x > 0$, $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$. Prouver qu'il existe une fonction $u : [1; +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que :

$$u\left(\frac{x + \frac{1}{x}}{2}\right) = f(x)$$

pour tout réel $x > 0$.

Exercice 30 (URSS 1974).

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(1) = 1$ et $f(x) \geqslant 0$ pour tout réel x. De plus, pour tous réels $x_1, x_2 \geqslant 0$ tels que $x_1 + x_2 \leqslant 1$, on a $f(x_1 + x_2) \geqslant f(x_1) + f(x_2)$.

a) Prouver que, pour tout réel x, on a $f(x) \leqslant 2x$.

b) Est-il exact que, pour tout réel x, on ait $f(x) \leqslant 1,9x$ et pourquoi ?

Exercice 31 (Proposé OIM 1989).

Soient $g : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ une fonction, $a \in \mathcal{C}$ et $\omega \in \mathcal{C} \backslash \{1\}$ tel que $\omega^3 = 1$. Prouver qu'il existe une et une seule fonction $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ telle que :

$$f(z) + f(\omega z + a) = g(z)$$

pour tout $z \in \mathcal{C}$ et déterminer cette fonction f.

Exercice 32 (American Mathematical Monthly).

Soit $n > 1$ un entier. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y :

$$f(x + y^n) = f(x) + (f(y))^n$$

Exercice 33 (Roumanie 1999).

Déterminer toutes les fonctions monotones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x :

$$f(f(f(x))) - 3f(f(x)) + 6f(x) = 4x + 3$$

Exercice 34 (Proposé OIM 1995).

Montrer qu'il existe une et une seule fonction $f : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}^\star$ telle que, pour tous entiers $m, n > 0$:

$$f(m + f(n)) = n + f(m + 95)$$

Quelle est la valeur de $\sum_{k=1}^{19} f(k)$?

Exercice 35 (Crux Mathematicorum).

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement croissantes et bijectives telles que, pour tout réel x :

$$f(x) + f^{-1}(x) = 2x$$

Exercice 36 (Proposé OIM 2000).

Trouver toutes les paires de fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y :

$$f(x + g(y)) = xf(y) - yf(x) + g(x)$$

Exercice 37 (OIM 1998).

On considère toutes les applications $f : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}^\star$ telles que, pour tous entiers $s, t > 0$:

$$f\left(t^2 f(s)\right) = s(f(t))^2$$

Déterminer la plus petite valeur possible de $f(1998)$.

Exercice 38.
Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y :

$$(f(x) + f(y))f\left(\frac{x+y}{2}\right) = 2f(x)f(y)$$

Exercice 39 (Israël 1995).
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}^{+\star}$ telles que, pour tous réels $x > 0$:

$$\alpha x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{x}{x+1}$$

Exercice 40 (Autriche/Pologne 1994).
Soient a, b deux réels. Déterminer les fonctions à deux variables $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y, z :

$$f(x,y) = af(x,z) + bf(y,z)$$

Exercice 41 (Turquie 1996).
Prouver qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tous réels $x, y > 0$:

$$f(x+y) > f(x)(1 + yf(x))$$

Exercice 42 (OIM 1975).
Déterminer toutes les fonctions polynômiales à deux variables P qui vérifient les conditions suivantes :
i) il existe un entier $n > 0$ tel que, pour tous réels x, y, t, on ait $P(tx, ty) = t^n P(x, y)$
ii) pour tous a, b, c réels, on a $P(b+c, a) + P(c+a, b) + P(a+b, c) = 0$
iii) $P(1, 0) = 1$

Exercice 43 (OIM 1986).
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ qui vérifient les conditions suivantes :
i) $f(2) = 0$
ii) pour tout $x \in [0, 2[$, $f(x) \neq 0$
iii) pour tous réels $x, y \geqslant 0$, $f(xf(y))f(y) = f(x+y)$

Exercice 44 (OIM 1993).
Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}^\star$ qui vérifie les conditions suivantes ?
i) $f(1) = 2$
ii) pour tout entier $n > 0$, $f(f(n)) = f(n) + n$
iii) $f(n) < f(n+1)$

Exercice 45 (OIM 1994).
Déterminer les fonctions $f :]-1, +\infty[\to]-1; +\infty[$ qui vérifient les conditions suivantes :
i) pour tous réels $x, y > -1$, $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$
ii) la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est strictement croissante sur $]-1; 0[$ et sur $\mathbb{R}^{+\star}$

7 Solutions

Exercice 1.

Soit $g : x \mapsto x^3 + x$. La fonction g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Par suite, g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note g^{-1} sa bijection réciproque. Alors, g^{-1} est également strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Soit f une solution éventuelle. Alors, l'énoncé devient : pour tout réel x, on a $f(g(x)) \leqslant x \leqslant g(f(x))$. En composant par g^{-1} à droite sur la première inégalité, il vient $f(x) \leqslant g^{-1}(x)$. En composant par g^{-1} à gauche sur la seconde inégalité, il vient $g^{-1}(x) \leqslant f(x)$.

Et donc $f(x) = g^{-1}(x)$.

Réciproquement, il est facile de vérifier que g^{-1} est bien solution du problème.

Exercice 2.

Soit f une solution éventuelle.

Pour $n = k = 0$, on déduit que $f(0) \in \{0, 1\}$. On considère donc deux cas :

a) Si $f(0) = 0$.

Pour $n = 0$, l'équation fonctionnelle nous donne $2f(k) = 0$ pour tout k. C.à.d. f est la fonction nulle qui, réciproquement, est bien une solution.

b) Si $f(0) = 1$.

- Pour $k = 0$, l'équation fonctionnelle nous donne $f(n) + f(-n) = 2f(n)$ pour tout n. C.à.d. f est paire. On peut donc restreindre l'étude aux entiers positifs.

- Pour $n = k$, on obtient cette fois $f(2k) = 2(f(k))^2 - 1$, pour tout entier k.

Par l'absurde : supposons que $|f(1)| \geqslant 2$. On prouve alors par récurrence sur $p \geqslant 0$ que $|f(2^p)| \geqslant 2^{p+1}$. Cette inégalité est vraie pour $p = 0$. Soit $p \geqslant 0$ un entier fixé. On suppose que $|f(2^p)| \geqslant 2^{p+1}$. Alors

$$\left|f\left(2^{p+1}\right)\right| = \left|2\left(f\left(2^p\right)\right)^2 - 1\right| \geqslant 2\left|f\left(2^p\right)\right|^2 - 1$$

la dernière inégalité provenant de l'inégalité triangulaire. Ainsi, $\left|f\left(2^{p+1}\right)\right| \geqslant 2^{2p+3} - 1 \geqslant 2^{p+2}$ (d'après l'hypothèse de récurrence), ce qui achève la démonstration.

Mais cela contredit que f soit bornée. Et donc $f(1) \in \{-1; 0; 1\}$. Il y a donc trois sous-cas à envisager :

i) Si $f(1) = 1$.

- Pour $n = 1$, l'équation fonctionnelle s'écrit $f(k+1) = 2f(k) - f(k-1)$, pour tout entier k. Une récurrence sans difficulté conduit alors à $f(n) = n$ pour tout entier n ce qui contredit à nouveau que f soit bornée.

ii) Si $f(1) = -1$.

- Pour $n = 1$, l'équation fonctionnelle s'écrit $f(k+1) + 2f(k) + f(k-1) = 0$, pour tout entier k. La suite $(f(k))_{k \geqslant 0}$ vérifie donc une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. On va donc utiliser la propriété 5. L'équation $X^2 + 2X + 1 = 0$ admet -1 comme solution double, et donc, pour tout $k \geqslant 0$, on a $f(k) = (\lambda k + \mu)(-1)^k$ où λ et μ sont deux constantes. Les conditions $f(0) = 1$ et $f(1) = -1$ conduisent à $\lambda = 0$ et $\mu = 1$, et donc $f(k) = (-1)^k$ pour tout $k \geqslant 0$. Pour cause de parité, on en déduit que $f(k) = (-1)^k$ pour tout entier k.

Réciproquement, on vérifie sans difficulté que cette fonction est bien une solution.

iii) Si $f(1) = 0$.

- Pour $n=1$, l'équation fonctionnelle s'écrit cette fois $f(k+1)=-f(k-1)$ pour tout entier k. De $f(0)=1$ et $f(1)=0$, on déduit alors facilement par récurrence (et parité) que, pour tout entier k :

$$f(4k)=1, \quad f(4k+1)=0, \quad f(4k+2)=-1 \quad \text{et} \quad f(4k+3)=0$$

Réciproquement, on vérifie sans difficulté que cette fonction est bien une solution.

Finalement, il y a donc trois solutions.

Exercice 3.

Soit f une solution éventuelle. On peut tout de suite remarquer qu'alors, pour toute constante réelle k la fonction $x \mapsto f(x)+k$ est également solution du problème. Cela nous donne un degré de liberté, et permet d'imposer que, par exemple, on ait $f(0)=0$.

Pour $y=0$, il vient alors, pour tout réel x, $f\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}f(x)$. Par suite, pour tous réels x,y, on a $\frac{f(x)+f(y)}{2}=f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x+y)}{2}$, c.à.d. $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

On reconnaît l'équation de Cauchy, dont on sait que les solutions continues sont les fonctions linéaires.

On en déduit facilement que les solutions de notre problème sont les fonctions affines.

Exercice 4.

Soit a un réel pour lequel il existe une fonction f satisfaisant les conditions de l'énoncé.
Essayons de déterminer quelques valeurs de $f(x)$:
- Pour $x=0$ et $y=1$, il vient $f\left(\frac{1}{2}\right)=a$
- Pour $x=0$ et $y=\frac{1}{2}$, on déduit alors $f\left(\frac{1}{4}\right)=a^2$
- Pour $x=\frac{1}{2}$ et $y=1$, on obtient : $f\left(\frac{3}{4}\right)=2a-a^2$
- Pour $x=\frac{1}{4}$ et $y=\frac{3}{4}$, il vient : $f\left(\frac{1}{2}\right)=3a^2-2a^3$

On doit donc avoir $3a^2-2a^3=a$, c.à.d. $-2a(a-1)\left(a-\frac{1}{2}\right)=0$, ou encore $a \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

- Si $a=0$.

L'équation fonctionnelle s'écrit $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=f(x)$ pour tous $x,y \in [0,1]$ tels que $x \leqslant y$. Pour $x=0$, on en déduit que $f(z)=0$ pour tout $z \in [0,\frac{1}{2}]$. Pour $x=\frac{1}{2}$, on en déduit alors que $f(z)=0$ pour tout $z \in [\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$. Considérons la suite (x_n) définie par $x_0=0$ et $x_{n+1}=\frac{x_n+1}{2}$ pour $n \geqslant 0$.

Il est facile de vérifier que lorsque x décrit $[0,x_n]$ et y décrit $[x,1]$, alors $\frac{x+y}{2}$ décrit $[0,x_{n+1}]$. Et, par récurrence, on prouve ainsi que si f est nulle sur $[0,x_n]$ alors elle l'est aussi sur $[0,x_{n+1}]$. Or, par récurrence également, on montre sans difficulté que la suite (x_n) est croissante et majorée par 1. Elle converge donc vers une limite L qui vérifie $L=\frac{L+1}{2}$, c.à.d. vers 1.

Par suite, f est nulle sur $[0,1[$. Et, par continuité, elle donc nulle sur $[0,1]$, ce qui contredit que $f(1)=1$.

Par conséquent $a=0$ n'est pas une solution du problème.

- Si $a=1$.

L'équation fonctionnelle s'écrit $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=f(y)$ pour tous $x,y \in [0,1]$ tels que $x \leqslant y$. On prouve de même qu'alors $f(x)=1$ pour tout $x \in [0;1]$, ce qui contredit que $f(0)=0$.

Par suite, $a=1$ n'est pas une solution du problème.

- Si $a=\frac{1}{2}$.

L'équation fonctionnelle s'écrit $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$ pour tous $x,y \in [0,1]$ tels que $x \leqslant y$. Il n'y a pas à chercher bien loin pour trouver une fonction convenable (surtout si on a déjà traité l'exercice 4) : l'identité fait très bien l'affaire.

Finalement, la seule solution est $a = \frac{1}{2}$.

Exercice 5.

A priori, il suffit de trouver une seule fonction qui vérifie l'équation fonctionnelle, et on pourrait s'attendre à ce que cela ne soit pas bien difficile à réaliser. Que nenni ! L'équation fonctionnelle n'étant pas très simple à appréhender, une solution ne saute pas vraiment aux yeux. Essayons donc de rendre le problème plus sympathique.

Soit f une solution éventuelle. Comme on suit les conseils de la partie cours, on va chercher quelques propriétés de f. Or, on remarque immédiatement que f est injective. En effet, si $a, b \in \mathbb{Q}^{+\star}$ et $f(a) = f(b)$, alors $\frac{f(a)}{a} = f(af(a)) = f(af(b)) = \frac{f(a)}{b}$ et donc $a = b$ (puisque $f(a) \neq 0$).

Essayons maintenant de déterminer certaines valeurs particulières :

- Pour $x = y = 1$, on a $f(f(1)) = f(1)$. Mais, on vient de voir que f est injective, donc $f(1) = 1$. On en déduit immédiatement que, pour tout $y \in \mathbb{Q}^{+\star}$, on a

$$f(f(y)) = \frac{1}{y} \tag{3}$$

Mais alors f est bijective : d'après ci-dessus, il suffit pour cela de prouver qu'elle est surjective. Or, si $y \in \mathbb{Q}^{+\star}$, la relation (3) conduit à : $y = f\left(f\left(\frac{1}{y}\right)\right)$, ce qui montre que y admet bien un antécédant par f.

- Pour $x = f\left(\frac{1}{y}\right)$, il vient $f\left(f\left(\frac{1}{y}\right)f(y)\right) = \frac{f\left(f\left(\frac{1}{y}\right)\right)}{y} = 1 = f(1)$ (d'après (3)). Donc, puisque f est injective, on a pour tout $y \in \mathbb{Q}^{+\star}$,

$$f\left(\frac{1}{y}\right) f(y) = 1 \tag{4}$$

- Pour tous $x, y \in \mathbb{Q}^{+\star}$, puisque f est bijective, il existe $t \in \mathbb{Q}^{+\star}$ tel que $y = f\left(\frac{1}{t}\right)$. Par suite, d'après (3), on a $f(y) = f\left(f\left(\frac{1}{t}\right)\right) = t$. Et donc :

$$f(xy) = f\left(xf\left(\frac{1}{t}\right)\right) = tf(x) = f(x)f(y) \tag{5}$$

Les relations (3) et (5) sont tout de même bien plus agréables que l'équation fonctionnelle initiale. Il reste quand même à prouver qu'elles sont, à elles deux, équivalentes à cette dernière.

Or, si $g : \mathbb{Q}^{+\star} \to \mathbb{Q}^{+\star}$ est une fonction telle que, pour tous $x, y \in \mathbb{Q}^{+\star}$, $g(g(y)) = \frac{1}{y}$ et $g(xy) = g(x)g(y)$, alors pour tous $x, y \in \mathbb{Q}^{+\star}$, on a $g(xg(y)) = g(x)g(g(y)) = \frac{g(x)}{y}$, ce qui assure que g est vérifie bien l'équation fonctionnelle initiale.

Finalement, il ne nous reste plus qu'à construire une fonction $f : \mathbb{Q}^{+\star} \to \mathbb{Q}^{+\star}$ vérifiant (3) et (5). Or, de (5), on déduit immédiatement que si $p_1, \ldots, p_n$ sont des nombres premiers (ici, le caractère premier n'est pas fondamental, mais on travaille pour l'avenir, et on se doute que puisqu'il faut construire une fonction sur les rationnels, les décompositions en facteurs premiers nous serons probablement utiles), et si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des entiers (éventuellement négatifs), alors il faut que :

$$f\left(p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n}\right) = f\left(p_1\right)^{\alpha_1} \ldots f\left(p_n\right)^{\alpha_n} \tag{6}$$

L'idée est alors de considérer la suite (p_i) des nombres premiers ordonnés (c.à.d. $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, etc.) et de poser, pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$f\left(p_{2k-1}\right) = p_{2k} \quad \text{et} \quad f\left(p_{2k}\right) = \frac{1}{p_{2k-1}}$$

Puis, d'étendre la construction de f à $\mathbb{Q}^{+\star}$ tout entier. Tout rationnel $x > 0$ s'écrit de façon unique sous la forme $x = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\alpha_i}$, où les α_i sont des entiers quelconques, seulement un nombre fini d'entre eux étant non nuls. On définit alors $f(x)$ *via* (6). Il n'est pas difficile de vérifier que, dans ces conditions, les relations (3) et (5) sont vérifiées, et donc que f est bien une solution du problème.

Exercice 6.

L'idée est de « créer » de la symétrie dans l'équation fonctionnelle. Soit f une solution éventuelle. On note f^k la k-ième itérée de f. Pour tous entiers m, n, on a alors

$$f\left(f^2(m) + f^2(n)\right) = -f^2\left(f^2(m) + 1\right) - n$$

Le membre de gauche étant symétrique en m et n, celui de droite doit l'être également, d'où

$$f^2\left(f^2(m) + 1\right) + n = f^2\left(f^2(n) + 1\right) + m$$

c.à.d.

$$m - n = f^2\left(f^2(m) + 1\right) - f^2\left(f^2(n) + 1\right)$$

Or, d'après l'équation fonctionnelle initiale $f^2\left(f^2(m) + 1\right) = f\left(-f^2(2) - m\right) = f(-k-m)$, où $k = f^2(2)$. Donc, pour tous entiers m, n, on a :

$$m - n = f(-k - m) - f(-k - n)$$

Pour $n = -k$ et $p = -m - k$, on déduit que pour tout entier p, $f(p) = f(0) - p$. Notons qu'en particulier, $f(f(p)) = f(f(0) - p) = f(0) - (f(0) - p) = p$.

Réciproquement, si $f : p \mapsto q - p$ où $q \in \mathbb{Z}$ est une constante, alors, pour tous entiers m, n, on a d'une part $f(m + f(f(n))) = f(m + n) = q - m - n$ et, d'autre part $-f(f(m + 1)) - n = -m - 1 - n$. Par suite, la seule solution du problème est $f : p \mapsto 1 - p$.

Exercice 7.

Soit f une solution éventuelle.

- Pour $y = x^2$, il vient $f\left(f(x) + x^2\right) = f(0) + 4x^2 f(x)$
- Pour $y = -f(x)$, on obtient $f(0) = f\left(f(x) + x^2\right) - 4(f(x))^2$

En additionnant ces deux relations, on déduit que, pour tout réel x, $4f(x)\left(f(x) - x^2\right) = 0$. Et donc $f(x) = 0$ ou $f(x) = x^2$.

Mais attention, pour autant f n'est pas forcément la fonction nulle ou la fonction carrée, qui cependant sont bien des solutions du problème. Elle pourrait coïncider avec l'une ou l'autre de ces deux fonctions selon les valeurs de x. Montrons que cela n'est pas le cas.

Supposons donc qu'il existe $a \in \mathbb{R}^\star$ tel que $f(a) = 0$ (dans le cas contraire, on aurait $f(a) = a^2$ pour tout réel a).

- Pour $x = a$, l'équation fonctionnelle initiale s'écrit : $f(y) = f\left(a^2 - y\right)$ pour tout réel y. Or, si $y \neq \frac{a^2}{2}$ alors $y^2 \neq \left(a^2 - y\right)^2$ et donc on doit avoir $f(y) = f\left(a^2 - y\right) = 0$. Ainsi, $f(y) = 0$ pour tout $y \neq \frac{a^2}{2}$.

Mais, pour $x = \frac{a^2}{2}$, il suffit de choisir $y \neq 0$ tel que $f\left(\frac{a^2}{2}\right) + y \neq \frac{a^2}{2}$ et $\left(\frac{a^2}{2}\right)^2 - y \neq \frac{a^2}{2}$. Pour ces valeurs, l'équation fonctionnelle initiale conduit alors directement à $f\left(\frac{a^2}{2}\right) = 0$. Et donc f est la fonction nulle.

Finalement, il y a deux solutions qui sont la fonction nulle et $x \mapsto x^2$.

Exercice 8.

Soit f une fonction satisfaisant les conditions de l'énoncé, autre que la fonction nulle.

- Pour $x = y$, il vient $f(2x)f(0) = (f(x))^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Puisque f n'est pas la fonction nulle, la relation précédente entraine que $f(0) \neq 0$.

Par l'absurde : supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = 0$. Toujours d'après la relation précédente, on a $0 = f(a)f(0) = \left(f\left(\frac{a}{2}\right)\right)^2$, d'où $f\left(\frac{a}{2}\right) = 0$. Une récurrence immédiate conduit à $f\left(\frac{a}{2^n}\right) = 0$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

Mais $\lim_{n\to+\infty} \frac{a}{2^n} = 0$ et f est continue, donc $f(0) = \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{a}{2^n}\right) = 0$. Contradiction.

Exercice 9.

Soit f une fonction vérifiant les conditions de l'énoncé (notons qu'il existe bien de telles fonctions : la fonction $x \mapsto k$ où $k \in [-1, 1]$ est une constante).

On pose $g : x \mapsto f\left(x + \frac{1}{6}\right) - f(x)$. D'après l'équation fonctionnelle, pour tout réel x il vient :

$$g\left(x + \frac{1}{7}\right) = f\left(x + \frac{13}{42}\right) - f\left(x + \frac{1}{7}\right) = f\left(x + \frac{1}{6}\right) - f(x) = g(x)$$

Par suite, la fonction g est $\frac{1}{7}$-périodique. Elle est donc également 1-périodique (puisque $1 = 7 \times \frac{1}{7}$). Ainsi, pour tout réel x on a $g(x+1) = g(x)$ c.à.d. $f\left(x + 1 + \frac{1}{6}\right) - f(x+1) = f\left(x + \frac{1}{6}\right) - f(x)$, ou encore

$$f\left(x + 1 + \frac{1}{6}\right) - f\left(x + \frac{1}{6}\right) = f(x+1) - f(x)$$

Cela signifie que la fonction $h : x \mapsto f(x+1) - f(x)$ est $\frac{1}{6}$-périodique. Et donc elle est aussi 1-périodique. Par suite, pour tout réel x on a $h(x+1) = h(x)$ c.à.d. :

$$f(x+2) - f(x+1) = f(x+1) - f(x) \tag{7}$$

Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. De (7), on déduit que la quantité $f(a+n) - f(a+n-1)$ est indépendante de n. Notons c cette valeur commune. Alors, pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$f(a+k) = f(a) + \sum_{i=1}^{k} f(a+i) - f(a+i-1) = kc + f(a)$$

Si l'on fait tendre k vers $+\infty$, on constate que, puisque f est bornée, c'est donc que $c = 0$. Mais alors $f(a+1) - f(a) = 0$, et ce pour tout réel a. Par suite, f est 1-périodique.

Exercice 10.

Soit f une fonction vérifiant les conditions de l'énoncé (une telle fonction existe bien. Par exemple : l'identité).

- Pour $a = 2$ et $b = 3$, la condition i) conduit à $f(6) = f(2)f(3)$. Or, pour $p = 3$ et $q = 3$, la condition *ii*) donne $f(6) = 2f(3)$. Comme $f(3) \neq 0$, on en déduit que $f(2) = 2$.

- Pour $p = q = 2$, la condition ii) conduit alors à $f(4) = 4$.

- Pour $p = 2$ et $q = 3$, la condition ii) donne $f(5) = 2 + f(3)$. Alors, pour $p = 5$ et $q = 2$, la condition ii) conduit à $f(7) = f(5) + 2 = f(3) + 4$. Mais pour $p = 5$ et $q = 7$, la condition ii) donne cette fois $f(12) = f(7) + f(5) = 2f(3) + 6$. Tandis que, pour $a = 4$ et $b = 3$, la condition i) conduit à $f(12) = 4f(3)$. On en déduit alors que $f(3) = 3$, puis que $f(5) = 5$ et $f(7) = 7$.

Pour déterminer $f(1999)$ il convient de savoir que 1999 est premier, et que $1999 + 3 = 2002 = 2 \times 7 \times 11 \times 13$. Il suffit donc de trouver $f(11)$ et $f(13)$.

- Pour $a = 5$ et $b = 3$, la condition i) conduit à $f(15) = 15$.
- Pour $p = 13$ et $q = 2$, la condition ii) donne alors $f(13) = f(15) - f(2) = 13$.
- Pour $p = 11$ et $q = 2$, la condition ii) donne alors $f(11) = f(13) - f(2) = 11$.

On en déduit que $f(2002) = f(2)f(7)f(11)f(13) = 2002$, puis que $f(1999) = f(2002) - f(2) = 1999$.

Exercice 11.

Soit f une solution éventuelle. Soit $x \notin \{-1; 1\}$. La forme de l'équation fonctionnelle pousse à effectuer les deux changements de variables suivants (ça ne peut pas donner quelque chose de pire) :

- On pose $t = \frac{x-3}{x+1}$, alors $t \notin \{-1, 1\}$ et $x = \frac{3+t}{1-t}$. L'équation fonctionnelle s'écrit alors :

$$f(t) + f\left(\frac{t-3}{t+1}\right) = \frac{3+t}{1-t}$$

pour tout $t \notin \{-1; 1\}$.

- On pose $t = \frac{x+3}{1-x}$, alors $t \notin \{-1, 1\}$ et $x = \frac{t-3}{1+t}$. L'équation fonctionnelle s'écrit alors :

$$f\left(\frac{3+t}{1-t}\right) + f(t) = \frac{t-3}{1+t}$$

pour tout $t \notin \{-1; 1\}$.

En sommant membre à membre les deux relations obtenues, il vient, pour tout $t \notin \{-1; 1\}$:

$$\frac{8t}{1-t^2} = 2f(t) + f\left(\frac{t-3}{t+1}\right) + f(\left(\frac{3+t}{1-t}\right) = 2f(t) + t$$

la dernière égalité étant obtenue en utilisant l'équation fonctionnelle initiale. Il vient $f(t) = \frac{4t}{1-t^2} - \frac{t}{2}$.

Réciproquement, il n'est pas difficile de vérifier que la fonction $x \mapsto \frac{4x}{1-x^2} - \frac{x}{2}$ est bien une solution du problème.

Exercice 12.

Soit f une solution éventuelle. Commençons par déterminer les premières valeurs de $f(n)$ pour y voir un peu mieux. La condition i) implique que, pour tous entiers $m, n > 0$,

$$f(m+n) \geqslant f(m) + f(n) \tag{8}$$

En particulier, pour $m = n = 1$, il vient $f(2) \geqslant 2f(1)$. Et donc $f(1) = 0$ (d'après ii)). Pour $m = 2$ et $n = 1$, il vient $f(3) = f(2) + f(1) + t = t$, où $t \in \{0; 1\}$. Puisque $f(3) > 0$, c'est donc que $f(3) = 1$.

La relation (8) permet alors de minorer les nombres $f(3n)$ par récurrence : en effet, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $f(3(n+1)) \geqslant f(3n) + f(3) = f(3n) + 1$. Une récurrence sans difficulté conduit alors à $f(3n) \geqslant n$, pour tout entier $n \geqslant 0$.

Cette inégalité provenant d'inégalités successives, c'est ici que l'on va pouvoir exploiter la condition $f(9999) = 3333$. Par l'absurde : supposons qu'il existe $n \in \{0, 1, \ldots, 3333\}$ tel que $f(3n) > n$. Alors $n < 3333$ et la récurrence précédente conduit de la même façon à $f(3(n+k)) > n+k$ pour tout entier k tel que $n+k \in \{n, n+1, \ldots, 3333\}$. En particulier, $f(9999) > 3333$ qui est la contradiction souhaitée.

Donc, pour tout $n \in \{0, 1, ..., 3333\}$, on a

$$f(3n) = n \tag{9}$$

Nous sommes maintenant en mesure de calculer $f(1982)$. D'après (8) et (9), on a $1982 = f(3 \times 1982) \geqslant f(2 \times 1982) + f(1982) \geqslant 3f(1982)$. D'où $f(1982) \leqslant \frac{1982}{3}$, c.à.d. $f(1982) \leqslant 660$ (puisque $f(1982)$ est entier).

D'autre part, d'après (8) et (9) toujours, on a aussi $f(1982) \geqslant f(1980) + f(2) = f(1980) = f(3 \times 660) = 660$. Finalement $f(1982) = 660$.

Remarque : On peut noter qu'une telle fonction f existe. Il suffit par exemple de considérer $f : n \mapsto \left[\frac{n}{3}\right]$, où $[\cdot]$ désigne la partie entière.

Exercice 13.

Soit f une solution éventuelle. On pose $g : x \mapsto x^2 - 1996$. L'idée est de regarder d'un peu plus près les points fixes de f et de g. Les points fixes de g sont les deux solutions réelles distinctes de l'équation $x^2 - x - 1996 = 0$, que l'on va noter a et b.

Posons $f(a) = p$ et $f(b) = q$. Alors $a = g(a) = f(f(a)) = f(p)$, et alors $g(p) = f(f(p)) = f(a) = p$, ce qui prouve que p est aussi un point fixe de g. De même, q est un point fixe de g.

De plus, $f(p) = a \neq b = f(q)$ donc $p \neq q$. Et ainsi, on a $\{p, q\} = \{a, b\}$

On pose maintenant $h(x) = g(g(x)) = \left(x^2 - 1996\right)^2 - 1996$. Il n'est pas difficile de vérifier que la fonction h admet 4 points fixes distincts. Bien entendu, tout point fixe de g est également un point fixe de h. On note donc a, b, c, d les points fixes de h.

Le même raisonnement que ci-dessus permet de prouver que f induit une bijection de l'ensemble $\{a, b, c, d\}$ sur lui-même (c.à.d. $\{f(a), f(b), f(c), f(d)\} = \{a, b, c, d\}$). Or, c et d ne sont pas des points fixes de g, donc ce ne sont pas des points fixes de f non plus. Par suite, on doit avoir $f(c) = d$ et $f(d) = c$. Mais alors $g(c) = f(f(c)) = c$, ce qui contredit que c ne soit pas un point fixe de g.

Finalement, il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f \circ f = g$.

Exercice 14.

On constate rapidement que l'identité est une solution du problème. Prouvons que c'est la seule. Soit donc f une solution éventuelle.

- On commence par prouver que l'ensemble $E = \{x - f(x), x \in \mathbb{R}\}$ est fini. Par l'absurde : supposons que E soit infini. Alors, il existe une infinité de réels $k \neq 1$ pour lesquels il existe $x_k \in \mathbb{R}$ tel que $x_k - f(x_k) = k$. Pour chacun de ces réels k, on a (d'après l'équation fonctionnelle) :

$$\frac{f(k-1)}{k-1} = \frac{f(x_k) - 1 - f(x_k)}{k-1} = \frac{f(x_k) - 1 - x_k}{k-1} = -1 - \frac{2}{k-1}$$

Cela entraine que l'ensemble $\{\frac{f(x)}{x}, x \in \mathbb{R}^\star\}$ est infini. Contradiction.

- On peut donc considérer $a \in \mathbb{R}$ tel que $|a - f(a)|$ soit le maximum des nombres $|u|$ lorsque u décrit E. Soit alors $b = a - 1 - f(a)$. On a $b - f(b) = 2(a - f(a))$. La maximalité de $|a - f(a)|$ entraine alors que $a - f(a) = 0$, et donc (toujours pour cause de maximalité) que, pour tout réel x, $f(x) = x$.

Exercice 15.

Par l'absurde : supposons que de telles fonctions existent. Puisque $g \circ f$ est injective, il est facile d'en déduire que f est elle-même injective. Par suite, les nombres $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$ sont deux à deux distincts. Or, pour tout réel x, en combinant les deux relations, on a

$$f\left(x^3\right) = f(g(f(x))) = (f(x))^2$$

Donc, chacun des nombres $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$ est égal à son carré. Comme l'équation $x = x^2$ n'admet que deux solutions, c'est donc qu'au moins deux parmi $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$ sont égaux. Contradiction.

Exercice 16.

Par l'absurde : supposons qu'il existe une telle fonction f. Puisque, d'après i), la fonction f est bornée, on peut considérer la borne supérieure de f, notée μ.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\mu - \varepsilon > 0$ et sur lequel on imposera des conditions par la suite. Il existe donc un réel a tel que $f(a) \geqslant \mu - \varepsilon$. Et, puisque f est continue, on peut supposer que $a \neq 0$.

De plus, de ii), on déduit que : $f(2) = f\left(1 + \frac{1}{1^2}\right) = f(1) + (f(1))^2 = 2$. D'où $\mu \geqslant 2$. On a :

$$\mu \geqslant f\left(a + \frac{1}{a^2}\right) = f(a) + \left(f\left(\frac{1}{a}\right)\right)^2 \geqslant \mu - \varepsilon + \left(f\left(\frac{1}{a}\right)\right)^2$$

Par suite, $f\left(\frac{1}{a}\right) \geqslant -\sqrt{\varepsilon}$. Mais alors :

$$\mu \geqslant f\left(\frac{1}{a} + a^2\right) = f\left(\frac{1}{a}\right) + (f(a))^2 \geqslant -\sqrt{\varepsilon} + (\mu - \varepsilon)^2$$

c.à.d.

$$g(\mu) = (\mu - \varepsilon)^2 - \mu - \sqrt{\varepsilon} = \left(\mu - \varepsilon - \frac{1}{2}\right)^2 - \varepsilon - \sqrt{\varepsilon} - \frac{1}{4} \leqslant 0$$

Or $g(x) = \left(x - \varepsilon - \frac{1}{2}\right)^2 - \varepsilon - \sqrt{\varepsilon} - \frac{1}{4}$ est une fonction croissante sur $\left[\varepsilon + \frac{1}{2}, +\infty\right[$. On impose alors à ε de ne pas dépasser $\frac{3}{2}$, ce qui assure que $\varepsilon + \frac{1}{2} \leqslant 2 \leqslant \mu$ et donc que $g(\mu) \geqslant g(2) = \varepsilon^2 - 4\varepsilon - \sqrt{\varepsilon} + 2 = h(\varepsilon)$.

Il faut donc que $h(\varepsilon) \leqslant 0$. Mais, puisque $\lim_{\varepsilon \to 0} h(\varepsilon) = 2$, il est possible de choisir initialement $\varepsilon \in \left]0, \frac{3}{2}\right]$ de sorte que $h(\varepsilon) > 0$, ce qui amène la contradiction désirée.

Remarques : a) Si l'on veut être plus concret, il suffit par exemple de choisir $\varepsilon = \frac{1}{4}$.

b) Et, si de plus, on veut éviter le recours à la notion de borne supérieure, on peut alors choisir μ comme étant le plus petit majorant de f qui soit de la forme $\frac{n}{4}$ où n est un entier.

Exercice 17.

Soit f une fonction réelle (sous réserve d'existence) telle que pour tous réels x, y, z, t :

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz) \tag{10}$$

a) Pour $x = z$ et $y = t = 0$, il vient $4f(x)f(0) = 2f(0)$, pour tout réel x. En particulier, $4(f(0))^2 = 2f(0)$. Et donc, $f(0) = 0$ ou $f(0) = \frac{1}{2}$. Si $f(0) = \frac{1}{2}$, la relation précédente conduit à $f(x) = \frac{1}{2}$, pour tout réel x.

Réciproquement, la fonction $f : (x \mapsto \frac{1}{2})$ est bien solution du problème.

On suppose maintenant que $f(0) = 0$.

b) Pour $z = t = 0$, la relation (10) s'écrit :

$$f(x)f(y) = f(xy) \tag{11}$$

pour tous réels x, y. En particulier, pour tout réel x, on a $f(x^2) = (f(x))^2$. Comme tout réel positif ou nul est un carré, cela assure que f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}^+$.

c) Le membre de droite de la relation (10) est invariant par la transformation $(x, y, z, t) \mapsto (z, x, y, -t)$. Il doit donc en être de même du membre de gauche. Et donc, pour tous réels x, y, z, t :

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = (f(z) + f(x))(f(y) + f(-t))$$

ou encore

$$(f(x) + f(z))(f(t) - f(-t)) = 0 \tag{12}$$

Supposons que, pour tous réels x, z, on ait $f(x) + f(z) = 0$. En particulier, pour $x = z$, il vient $f(x) = 0$.

Réciproquement, la fonction nulle est bien solution du problème.

On suppose maintenant que f n'est pas la fonction nulle. D'après ce qui précéde, il existe donc $x, z \in \mathbb{R}$, pour lesquels $f(x) + f(z) \neq 0$. Mais alors, la relation (12) prouve que $f(t) = f(-t)$, pour tout réel t, ce qui assure f est paire.

Notons qu'alors, d'après b), on a $f \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$.

d) De (11), il vient $f(x) = f(x)f(1)$, pour tout réel x. Et, comme f n'est pas la fonction nulle, c'est donc que $f(1) = 1$. D'autre part, pour $y = z = t = 1$, la relation (10) conduit à $2(f(x)+f(1)) = f(x-1)+f(x+1)$, pour tout réel x. Et ainsi $f(x+1) = 2f(x)+2-f(x-1)$. Or, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Il est alors facile de vérifier par récurrence que $f(x) = x^2$, pour tout entier $x \geqslant 0$. Et donc, par parité, on a $f(x) = x^2$, pour tout entier x.

Soient p, q deux entiers, avec $q \neq 0$.

D'après (11), on a alors $p^2 = f(p) = f(q)f\left(\frac{p}{q}\right) = q^2 f\left(\frac{p}{q}\right)$, d'où $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p^2}{q^2}$, ce qui assure que $f(x) = x^2$, pour tout rationnel x.

e) Soient x, z des réels. Pour $x = y$ et $z = t$, la relation (10) conduit à :

$$(f(x) + f(z))^2 = f\left(x^2 - z^2\right) + f(2zx)$$

Pour $x = y$ et $z = -t$, et en utilisant la parité de f, la relation (10) conduit à :

$$(f(x) + f(z))^2 = f\left(x^2 + z^2\right)$$

Ainsi,

$$f\left(x^2 + z^2\right) = f\left(x^2 - z^2\right) + f(2zx) \tag{13}$$

pour tous réels x, z.

Soient $a, h \in \mathbb{R}^+$. En choisissant $x, z \in \mathbb{R}^+$ tels que $x^2 = a + \frac{h}{2}$ et $z^2 = \frac{h}{2}$, on a $a + h = x^2 + z^2$ et $a = x^2 - z^2$. Et, d'après (13) et c), il vient alors $f(a + h) - f(a) = f(2zx) \geqslant 0$. On en déduit que f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

f) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On sait qu'il existe deux suites (r_n) et (r'_n) de rationnels positifs ou nuls telles que, pour tout $n \geqslant 0$, on ait $r_n \leqslant x \leqslant r'_n$, et $\lim_{n\to+\infty} r_n = \lim_{n\to+\infty} r'_n = x$. Pour tout $n \geqslant 0$, puisque f est croissante et d'après les résultats du d), on a :

$$r_n{}^2 = f(r_n) \leqslant f(x) \leqslant f\left(r'_n\right) = r'_n{}^2$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, il vient $f(x) = x^2$. Ainsi, $f(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. Et par parité : $f(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, la fonction $f : x \mapsto x^2$ est bien solution du problème.

Finalement, les solutions du problème sont : $f : x \mapsto x^2$, $f : x \mapsto 0$ et $f : x \mapsto \frac{1}{2}$.

Exercice 18.

Soit f une solution éventuelle.

- Pour $x = 0$, il vient $f(f(y)) = y + (f(0))^2$, pour tout réel y. Puisque $f \circ f$ est affine, elle est bijective. On en déduit facilement que f est également bijective.

De plus, le membre de gauche de l'équation fonctionnelle étant invariant par la transformation $x \mapsto -x$, il doit en être de même du membre de droite. Par suite, pour tout réel x, on a $(f(x))^2 = (f(-x))^2$. L'injectivité de f assure alors que $f(-x) = -f(x)$, et donc que f est impaire.

Notons qu'alors $f(0) = 0$, et donc que $f(f(y)) = y$, pour tout réel y. De plus $f\left(x^2\right) = (f(x))^2$, pour tout réel x. Comme tout réel positif est un carré, la relation précédente nous assure, entre autre, que f est positive sur $\mathbb{R}^+$.

- Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$. Puisque f est surjective, il existe donc des réels x, y tels que $a = x^2$ et $b = f(y)$. Alors $f(b) = f(f(y)) = y$ et, $f(a) = f\left(x^2\right) = (f(x))^2$. Alors

$$f(a+b) = f\left(x^2 + f(y)\right) = y + (f(x))^2 = f(a) + f(b)$$

On en déduit que la restriction de f à $\mathbb{R}^+$ vérifie l'équation de Cauchy (cf. 4), et la démarche suivie dans la partie Cours s'adapte en tout point pour prouver que f est linéaire sur $\mathbb{Q}^+$. Or, puisque f est positive sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit que, pour tous réels $u, v \geqslant 0$, on a $f(u+v) = f(u) + f(v) \geqslant f(u)$, et donc que f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

La démarche suivie au 4 s'adapte alors en tout point pour prouver que f est linéaire sur $\mathbb{R}^+$. Et, puisque f est impaire, c'est donc que f est linéaire sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement, il est facile de vérifier que la seule fonction linéaire qui soit solution de l'équation fonctionnelle initiale est l'identité.

Exercice 19.

Soit $\Im f = \{f(a),\ a \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des images par f. On pose $c = f(0)$.

- Pour $x = y = 0$, il vient $f(-c) = f(c) + c - 1$, ce qui assure que $c \neq 0$.

- Pour $x = f(y)$, il vient $c = 2f(x) + x^2 - 1$.

Donc, pour tout $x \in \Im f$, on a

$$f(x) = \frac{c + 1 - x^2}{2} \tag{14}$$

Cela signifie que f est déterminée sur $\Im f$. Il reste à étendre nos connaissances à $\mathbb{R}$ tout entier. D'après le membre de gauche de l'équation fonctionnelle, cela serait facile si tout réel était la différence de deux éléments de $\Im f$. C'est ce que l'on va prouver maintenant.

- Pour $y = 0$, il vient : $f(x - c) - f(x) = f(c) + cx - 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Puisque le membre de droite de cette relation est une expression affine en x et non constante (puisque

$c \neq 0$), on en déduit que, lorsque x décrit $\mathbb{R}$, la quantité $f(x-c) - f(x)$ prend elle aussi toutes les valeurs réelles possibles. Cela nous permet d'affirmer que tout réel s'écrit comme la différence de deux éléments de $\Im f$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe donc $a, b \in \Im f$ tels que $x = a - b$. Alors, d'après (14) :

$$\begin{aligned} f(x) = f(a-b) &= f(b) + ab + f(a) - 1 \\ &= \frac{c+1-a^2}{2} + ab + \frac{c+1-b^2}{2} - 1 \\ &= c - \frac{1}{2}(a-b)^2 \\ &= c - \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

En particulier, si $x \in \Im f$, en comparant les deux expressions de $f(x)$ trouvées, il vient $c = 1$. Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$.

Réciproquement, on vérifie sans difficulté que la fonction $x \mapsto 1 - \frac{1}{2}x^2$ est bien une solution du problème.

Exercice 20.

Soit f une solution éventuelle.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(n+1) > f(f(n)) \geqslant 0$ et donc, puisque $f(n+1)$ est entier $f(n+1) \geqslant 1$. Posons $f_2 : n \mapsto f(n+1) - 1$. Alors f_2 est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$f_2(n) + 1 = f(n+1) > f(f(n)) = f\left(f_2(n-1) + 1\right) = f_2\left(f_2(n-1)\right) + 1$$

ou encore $f_2(n+1) > f_2\left(f_2(n)\right)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, c.à.d. f_2 est aussi une solution du problème. En particulier, $f_2(n+1) \geqslant 1$ et donc $f(n+2) \geqslant 2$.

Une récurrence sans difficulté montre alors que pour tous entiers $n, k \geqslant 0$, on a $f(n+k) \geqslant k$. En particulier, pour $n = 0$, il vient $f(k) \geqslant k$ pour tout entier $k \geqslant 0$.

Et ainsi, on obtient $f(k+1) > f(f(k)) \geqslant f(k)$, ce qui prouve que f est strictement croissante sur $\mathbb{N}$. La première inégalité conduit alors à $k+1 > f(k) \geqslant k$, ce qui entraine (puisque $f(k)$ est entier) que $f(k) = k$.

Réciproquement, l'identité est bien une solution du problème.

Exercice 21.

La fonction nulle est clairement une solution. Soit f une solution éventuelle, autre que la fonction nulle.

- Pour $m = n = 0$, il vient $f(f(0)) = f(f(0)) + f(0)$, d'où $f(0) = 0$.

- Pour $m = 0$, il vient alors $f(f(n)) = f(n)$, pour tout entier $n \geqslant 0$.

Cela permet d'affirmer que l'ensemble $\Im f$ de toutes les images par f (i.e. l'ensemble $\{f(a),\, a \in \mathbb{N}\}$) est formé des points fixes de f : en effet, la relation précédente montre que tout élément de $\Im f$ est un point fixe. Et, réciproquement, tout point fixe a de f vérifie $a = f(a)$, et appartient donc à $\Im f$.

- Pour tous $m, n \in \Im f$, l'équation fonctionnelle s'écrit alors $f(m+n) = m+n$. Et ainsi, $m+n$ est aussi un point fixe de f. Et, si de plus $m \geqslant n$ alors, d'après l'équation fonctionnelle :

$$m = f(m) = f(m-n+n) = f(m-n+f(n)) = f(f(m-n)) + f(n) = f(m-n) + n$$

d'où $f(m-n) = m-n$, ce qui montre que $m-n$ est aussi un point fixe de f.

Plus précisément, on vient de prouver que $\Im f$ est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ stable par addition et soustraction (du moment qu'on reste avec des entiers positifs ou nuls). Or, de tels sous-ensembles ont une propriété particulière : ce sont les ensembles de la forme $a\mathbb{N} = \{an,\, n \in \mathbb{N}\}$, où a est un entier.

Admettons cette affirmation pour le moment. Il existe donc un entier $a \neq 0$ tel que, pour tout entier $n \geqslant 0$, le nombre $f(n)$ soit un multiple de a, et tout multiple de a est un point fixe de f. Pour $r \in \{0, 1, \ldots, a-1\}$, on pose $f(r) = n_r a$. En particulier, on a $n_0 = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. La division euclidienne de n par a s'écrit $n = aq + r$, avec $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, 1, \ldots, a-1\}$. On a alors :

$$f(n) = f(aq + r) = f(r + f(aq)) = f(f(r)) + f(aq) = f(r) + aq = (n_r + q)\, a$$

ce qui assure que f est entièrement déterminée par ses valeurs sur $\{1, \ldots, a-1\}$, c.à.d. par les choix faits pour les entiers $n_1, \ldots, n_{a-1}$.

Réciproquement, toute donnée d'un entier $a > 0$ et d'entiers positifs ou nuls $n_1, \ldots, n_{a-1}$ permet de construire une solution du problème en posant $f(0) = 0$, $f(r) = n_r a$ pour $r \in \{0, 1, \ldots, a-1\}$, et $f(n) = (n_r + q)\, a$ où q et r sont respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de n par a.

En effet, dans ces conditions, pour tous entiers $m, n \geqslant 0$, on pose les divisions euclidiennes respectives de m et de n par a : $n = aq + r$ et $m = pa + s$. Alors $f(m + f(n)) = f\left(pa + s + (n_r + q)\, a\right) = (n_r + q + p + n_s)\, a$. Et, d'autre part $f(f(m)) + f(n) = f\left((n_s + q)\, a\right) + (n_r + q)\, a = (n_s + q)\, a + (n_r + q)\, a$. Ce qui montre que f est bien une solution du problème.

Les solutions du problème sont donc la fonction nulle et toutes les fonctions du type ci-dessus.

Pour être complet, il reste à prouver l'affirmation faite en cours de route. Il est clair que tout ensemble de la forme $a\mathbb{N}$ est stable par addition et soustraction. Réciproquement, soit $E \subset \mathbb{N}$ non vide et stable par addition et soustraction :

- Si $E = \{0\}$, on a $E = 0\mathbb{N}$.

- Sinon, on peut considérer a le plus petit élément non nul de E. Puisque E est stable par addition, on a $a\mathbb{N} \subset E$. Soit $n \in E$. Soit $n = aq + r$, la division euclidienne de n par a. Puisque E est stable par soustraction et que n et aq appartiennent à E, on en déduit que $r \in E$. La minimalité de a impose alors que $r = 0$, c.à.d. que n soit un multiple de a. Par suite $E \subset a\mathbb{N}$.

Et alors, $E = a\mathbb{N}$, comme annoncé.

Exercice 22.

a) Soit f une solution éventuelle. On rappelle qu'une fonction strictement monotone est injective.

- Pour $x = y = 0$, il vient $f(f(0)) = f(0)$ et donc $f(0) = 0$.
- Pour $x = 0$, on a alors $f(f(y)) = y$, pour tout réel y.

Soient x, y des réels, et $a = f(y)$. D'après la relation précédente, on a donc $f(a) = y$. Par suite $f(x + y) = f(x + f(a)) = f(x) + a = f(x) + f(y)$. On constate que f est une fonction monotone qui vérifie l'équation de Cauchy. On sait qu'alors f est linéaire.

Réciproquement, il est facile de vérifier que les seules solutions linéaires du problème sont $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$.

b) Soit $n > 1$ un entier. Par l'absurde : supposons qu'il existe une fonction f qui vérifie les conditions de l'énoncé. Comme au a), f est alors injective et il vient $f(0) = 0$ et

$$f(f(y)) = y^n \qquad (15)$$

pour tout réel y.

- Si n est pair. Alors $f(f(-1)) = 1 = f(f(1))$, ce qui contredit l'injectivité de f.

- Si n est impair. Lorsque y décrit $\mathbb{R}$, le nombre y^n prend toutes les valeurs réelles possibles. La relation (15) montre qu'alors $f \circ f$ est surjective, et donc que f est surjective aussi.

Soient x, y des réels. D'après ce que l'on vient de voir, et puisque n est impair, il existe donc un unique réel b tel que $b^n = f(y)$. Alors, on a $f(f(b)) = b^n = f(y)$ et, par injectivité, $f(b) = y$. Par suite :

$$f(x) + f(y) = f(x) + b^n = f(x + f(b)) = f(x + y)$$

Comme au a), on en déduit que f est linéaire, c.à.d. qu'il existe un réel r tel que, pour tout réel x, on ait $f(x) = rx$.

La relation (15), pour $y = 1$ et pour $y = 2$, conduit alors à $r^2 = 1$ et $2r^2 = 2^n$. Donc $2^n = 2$ et $n = 1$, ce qui est la contradiction cherchée.

Exercice 23.

Soit f une solution éventuelle.

- En posant $x = -a$ et après multiplication par a, on obtient pour tout réel $a \neq 0$:

$$f(a) - af\left(\frac{-1}{a}\right) = a^2 \tag{16}$$

- En posant $x = \frac{1}{a}$, on en déduit que, pour tout $a \neq 0$, $f\left(\frac{1}{a}\right) - \frac{1}{a}f(-a) = \frac{1}{a^2}$, et donc $af\left(\frac{1}{a}\right)) - f(-a) = \frac{1}{a}$. Par suite :

$$-af\left(-\frac{1}{a}\right) - f(a) = -\frac{1}{a} \tag{17}$$

Par soustraction membre à membre de (16) et (17), on en déduit que, pour tout réel $a \neq 0$:

$$f(a) = \frac{1}{2}\left(a^2 + \frac{1}{a}\right) = \frac{a^3 + 1}{2a}$$

Réciproquement, il est facile de vérifier que la fonction $x \mapsto \frac{x^3+1}{2x}$ est bien solution du problème.

Exercice 24.

Soit f une solution éventuelle. Commençons par quelques essais numériques :

- Pour $x = 0$ et $y = 1$, il vient $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$.
- Pour $x = 1$ et $y = 0$, il vient $f\left(\frac{2}{3}\right) = 0$.
- Pour $x = 0$ et $y = \frac{1}{3}$, il vient $f\left(\frac{1}{9}\right) = 0$.
- Pour $x = \frac{1}{3}$ et $y = 0$, il vient $f\left(\frac{2}{9}\right) = 0$.
- Pour $x = 1$ et $y = \frac{1}{3}$, il vient $f\left(\frac{7}{9}\right) = 0$.
- Pour $x = \frac{1}{3}$ et $y = 1$, il vient $f\left(\frac{5}{9}\right) = 0$.

Bon. Il semble bien que les nombres de la forme $\frac{a}{3^n}$ soient incontournables et que f soit nulle sur ces nombres. Si l'on arrive à prouver ce dernier point, la conclusion ne sera plus qu'une question de continuité puisque l'ensemble des nombres de la forme $\frac{a}{3^n}$ où $a, n \in \mathbb{N}$ est dense dans $[0, 1]$.

Une récurrence s'impose. Soit $n \geqslant 0$ un entier fixé. Supposons que, pour tout $a \in \{0, 1, \ldots, 3^n\}$, on ait $f\left(\frac{a}{3^n}\right) = 0$. On peut noter que ceci est vrai pour $n = 0$ (d'après i)). Il est facile de vérifier que lorsque x, y décrivent l'ensemble $E_n = \{\frac{a}{3^n},\ a \in \{0, 1, \ldots, 3^n\}\}$, le nombre $\frac{2x+y}{3}$ décrit lui l'ensemble $E_{n+1} = \{\frac{a}{3^{n+1}},\, a \in \{0, 1, \ldots, 3^{n+1}\}\}$. De ii) et d'après l'hypothèse de récurrence, on en déduit que $f\left(\frac{a}{3^{n+1}}\right) = 0$ pour tout $\frac{a}{3^{n+1}} \in E_{n+1}$.

Comme prévu, la fonction f est nulle sur $E = \{\frac{a}{3^n},\, a, n \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leqslant a \leqslant 3^n\}$. Or, E est dense dans $[0, 1]$ et f est continue sur $[0; 1]$, donc f est la fonction nulle.

Réciproquement, la fonction nulle est trivialement solution du problème.

Exercice 25.

Par l'absurde : supposons qu'il existe une fonction vérifiant les conditions de l'énoncé.

- Pour $x = 0$, il vient :

$$f(f(y)) = -y + f(0) \tag{18}$$

La fonction $f \circ f$ est donc affine de pente -1. En particulier, c'est une bijection de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}$. Mais alors f est elle-même une bijection de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}$.

Pour $y = 0$, la relation (18) conduit à $f(f(0)) = f(0)$ et ainsi (par injectivité) $f(0) = 0$. Par conséquent, d'après (18), on a $f(f(y)) = -y$ pour tout entier y.

Soient x, y deux entiers. Puisque f est une bijection, il existe un entier a tel que $f(a) = y$. Il vient alors $f(y) = f(f(a)) = -a$. Ainsi :

$$f(x + y) = f(x + f(a)) = f(x) - a = f(x) + f(y)$$

On reconnaît là l'équation de Cauchy... On sait qu'alors f est linéaire et donc, pour tout entier x, on a $f(x) = xf(1)$. D'autre part $x(f(1))^2 = f(f(x)) = -x$. D'où $(f(1))^2 = -1$, ce qui est impossible pour $f(1)$ entier. C'est la contradiction cherchée. La conclusion en découle.

Exercice 26.

Il est clair que l'identité est une solution du problème. Prouvons que c'est la seule. Soit f une solution éventuelle. De la première condition et par une récurrence sans difficulté, on déduit que, pour tout $x \in \mathbb{Q}^{+\star}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(x + n) = f(x) + n$.

Soient $a, b \in \mathbb{N}^\star$. On a $\left(\frac{a}{b} + b\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 + b^2 + 2a$. Par suite, en utilsant la deuxième condition, il vient :

$$f\left(\left(\frac{a}{b} + b\right)^2\right) = \left(f\left(\frac{a}{b} + b\right)\right)^2 = \left(f\left(\frac{a}{b}\right) + b\right)^2 = \left(f\left(\frac{a}{b}\right)\right)^2 + b^2 + 2bf\left(\frac{a}{b}\right) \tag{19}$$

D'autre part

$$f\left(\left(\frac{a}{b} + b\right)^2\right) = f\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2 + b^2 + 2a\right) = f\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2\right) + b^2 + 2a = \left(f\left(\frac{a}{b}\right)\right)^2 + b^2 + 2a \tag{20}$$

De (19) et (20), on déduit immédiatement que $bf\left(\frac{a}{b}\right) = a$, c.à.d. $f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b}$.

Ceci étant vrai quels que soient les entiers strictement positifs a et b, cela entraine que $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{Q}^{+\star}$.

Exercice 27.

Soit f une solution éventuelle.

- Pour $x = y = 0$, il vient $f(0) = 0$.

La limite donnée dans l'énoncé invite à faire apparaître une telle quantité. Soit donc $y \in \mathbb{R}$. Pour tout réel $x \neq 0$, d'après l'équation fonctionnelle, on a :

$$\frac{f(x + y) - f(y)}{x} = \frac{f(x)}{x} + 2y$$

En faisant tendre x vers 0, il vient $\lim_{x\to 0} \frac{f(x+y)-f(y)}{x} = 1+2y$. Cela signifie que la fonction f est dérivable en y, et que $f'(y) = 1+2y$. Compte-tenu de $f(0) = 0$, on en déduit que, pour tout y, $f(y) = y^2 + y$.

Réciproquement, il est facile de vérifier que la fonction $x \mapsto x^2 + x$ est bien une solution du problème.

Exercice 28.

Soit P une solution éventuelle autre que le polynôme nul (qui est bien une solution). En prenant successivement pour x les valeurs 1, 2, 4 et 8, on obtient $P(2) = P(4) = P(8) = P(16) = 0$.

Soit $E = \{2, 4, 8, 16\}$. Soit $a \neq 0$ et $a \notin E$. Supposons que a soit une racine, *a priori* complexe de P.

- Si, pour tout entier $k \geqslant 0$, on a $2^k a \notin E$, alors $a \neq 16$, et l'équation fonctionnelle montre que $2a$ est aussi une racine de P. En effet, l'équation fonctionnelle définissant une égalité entre deux polynômes valable sur tout $\mathbb{R}$, elle est aussi valable sur $\mathcal{C}$. En répétant ce raisonnement, on prouve ainsi que, pour tout entier $k \geqslant 0$, le réel $2^k a$ est une racine de P, ce qui fournit une infinité de racines distinctes de P. Et donc P est le polynôme nul. Contradiction.

- S'il existe $k \geqslant 0$, pour lequel $2^k a \in E$, alors a est un réel et $0 < a < 2$ et donc $0 < \frac{a}{2} < 1$. De plus, d'après l'équation fonctionnelle, on déduit que $\frac{a}{2}$ est aussi une racine de P. En répétant ce raisonnement, on obtient une contradiction similaire à la précédente.

Par suite, les racines de P appartiennent toutes à $E \cup \{0\}$ et tout élément de E est une racine de P. On en déduit qu'il existe un réel $\lambda \neq 0$ et des entiers $\alpha \geqslant 0$, et $\beta, \gamma, \delta, \nu \geqslant 1$ tels que, pour tout réel x :

$$P(x) = \lambda x^\alpha (x-2)^\beta (x-4)^\gamma (x-8)^\delta (x-16)^\nu$$

L'équation fonctionnelle s'écrit alors :

$$\begin{aligned} & \lambda 2^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\nu} x^\alpha (x-1)^\beta (x-2)^\gamma (x-4)^\delta (x-8)^\nu (x-16) \\ = \; & 16\lambda (x-1) x^\alpha (x-2)^\beta (x-4)^\gamma (x-8)^\delta (x-16)^\nu \end{aligned}$$

En identifiant le coefficient dominant, il vient $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\nu = 4$, c.à.d. $\alpha = 0, \beta = \gamma = \delta = \nu = 1$. D'où $P(x) = \lambda(x-2)(x-4)(x-8)(x-16)$.

Réciproquement, on vérifie facilement que tout polynôme de la forme ci-dessus est bien une solution du problème.

Exercice 29.

On rappelle que, pour tout réel $x > 0$, on a $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ (puisque $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geqslant 0$). Soit $x > 0$. On pose $y = \frac{x+\frac{1}{x}}{2}$, c.à.d. $x = y + \sqrt{y^2-1}$ si $x \geqslant 1$ et $x = y - \sqrt{y^2-1}$ si $x \leqslant 1$. On peut noter que $\frac{1}{y-\sqrt{y^2-1}} = y + \sqrt{y^2-1}$.

Soit la fonction $u : t \mapsto f\left(t + \sqrt{t^2-1}\right)$ définie sur $[1; +\infty[$. Alors d'après ci-dessus :

- Si $x \geqslant 1$, on a :

$$u\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right) = f\left(y + \sqrt{y^2-1}\right) = f(x)$$

- Si $0 < x \leqslant 1$, on a :

$$u\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right) = f\left(y + \sqrt{y^2-1}\right) = f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$$

Et donc, la fonction u ainsi construite répond au problème.

Exercice 30.

a) Soit f une fonction vérifiant les conditions de l'énoncé.

- Pour $x_1 = x_2 = 0$, il vient $f(0) = 0$.

- On prouve facilement par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, et pour tous $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0,1]$ tels que $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant 1$, on a :

$$f\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right) \geqslant f\left(x_1\right) + f\left(x_2\right) + \ldots + f\left(x_n\right)$$

En particulier, pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$, il vient

$$f(nx) \geqslant nf(x) \tag{21}$$

- Si $x \geqslant \frac{1}{2}$ alors $1 = f(1) = f(1-x+x) \geqslant f(x) + f(1-x) \geqslant f(x)$. D'où $f(x) \leqslant 1 \leqslant 2x$.

- Si $0 < x < \frac{1}{2}$ alors il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $\frac{1}{2n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}$ c.à.d. $\frac{1}{2} \leqslant nx \leqslant 1$. De (21) et du cas précédent, on déduit que $nf(x) \leqslant f(nx) \leqslant 2nx$ d'où $f(x) \leqslant 2x$.

Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$, on a $f(x) \leqslant 2x$.

b) On va prouver que la constante 2 ne peut-être remplacée par une autre plus petite. Pour cela, on considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = 0$ si $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$, et $f(x) = 1$ si $\frac{1}{2} < x \leqslant 1$.

On vérifie facilement que f satisfait les conditions du problème.

Soit $k \in]0,2[$. Alors, il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $k < 2 - \frac{1}{n} < 2$. Soit $p \geqslant 2$ et $p > 4n-2$. Alors $\frac{1}{2n} + \frac{1}{pn} > \frac{2}{p}$, c.à.d. $\left(2 - \frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p}\right) < 1$. Posons $x_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$. On a donc bien $x_0 \in [0,1]$, mais $f(x_0) = 1 > kx_0$, ce qui assure la conclusion.

Exercice 31.

Supposons qu'une telle fonction f existe. D'après l'équation fonctionnelle, pour tout $z \in \mathcal{C}$, en remplaçant z par $\omega z + a$, il vient :

$$f(\omega z + a) + f\left(\omega^2 z + \omega a + a\right) = g(\omega z + a) \tag{22}$$

La même substitution conduit alors à :

$$f\left(\omega^2 z + \omega a + a\right) + f\left(\omega^3 z + \omega^2 a + \omega a + a\right) = g\left(\omega^2 z + \omega a + a\right)$$

c.à.d., puisque $\omega^3 = 1$ et $\omega \neq 1$:

$$f\left(\omega^2 z + \omega a + a\right) + f(z) = g\left(\omega^2 z + \omega a + a\right) \tag{23}$$

De (22), (23) et de l'équation fonctionnelle, on déduit alors que :

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(g\left(\omega^2 z + \omega a + a\right) - g\left(\omega z + a\right) + g(z)\right)$$

ce qui prouve l'unicité.

Il suffit maintenant de vérifier que la fonction f définie par la formule précédente est bien une solution du problème, ce qui ne pose pas de difficulté.

Exercice 32.

Soit f une solution éventuelle.

- Pour $x = y = 0$, il vient $f(0) = 0$.

- Pour $x=0$, on déduit que, pour tout réel y :

$$f\left(y^{n}\right)=(f(y))^{n} \tag{24}$$

Soit $a \geqslant 0$ un réel. Il existe un réel y tel que $a=y^{n}$, et donc, pour tout réel x d'après (24) on a :

$$f(x+a)=f(x)+(f(y))^{n}=f(x)+f(a) \tag{25}$$

En particulier, pour $x=-a$, on déduit que f est impaire. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^{+}$. Alors $f(x-a)=-f(-x+a)=-(f(-x)+f(a))=f(x)-f(a)$. Compte-tenu de (25), on en déduit que, pour tous réels x et a, on a $f(x+a)=f(x)+f(a)$.

C'est encore l'équation de Cauchy.... On sait qu'alors, pour tout réel x et tout rationnel r, on a $f(xr)=rf(x)$ et, en particulier $f(r)=rf(1)$.

Mais l'équation fonctionnelle donne plus d'information que l'équation de Cauchy, et c'est ainsi que l'on va résoudre le problème. Il s'agit donc d'exploiter la présence de la puissance dans l'équation initiale.

Soient $r \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a donc $f\left((r+x)^{n}\right)=(f(r)+f(x))^{n}$. Or :

$$f\left((r+x)^{n}\right)=f\left(\sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} r^{k} x^{n-k}\right)=\sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} r^{k} f\left(x^{n-k}\right)$$

et :

$$(f(r)+f(x))^{n}=\sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k}(f(r))^{k}(f(x))^{n-k}=\sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} r^{k}(f(1))^{k}(f(x))^{n-k}$$

d'où :

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} r^{k} f\left(x^{n-k}\right)=\sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} r^{k}(f(1))^{k}(f(x))^{n-k}$$

Considérant x fixé, les deux polynômes (en r) ci-dessus coïncident sur tous les rationnels, et donc ils sont égaux et on peut identifier les coefficients. En particulier, pour $k=n-2$ et pour $k=n-1$, il vient :

$$f\left(x^{2}\right)=(f(x))^{2}(f(1))^{n-2} \quad \text{et} \quad f(x)=f(x)(f(1))^{n-1} \tag{26}$$

pour tout x. Pour $x=1$, on en déduit que $f(1)=0$ ou $f(1)=1$ ou, si n est impair, $f(1)=-1$.

- Si $f(1)=0$, de (26), il vient $f(x)=0$ pour tout réel x.

Réciproquement, la fonction nulle est bien une solution.

- Si $f(1)=1$, de (3) et puisque tout réel positif est un carré, il vient $f \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}^{+}$. Soient alors x, y des réels tels que $0 \leqslant x \leqslant y$. Alors $x^{2} \leqslant y^{2}$, et ainsi :

$$0 \leqslant f\left(y^{2}-x^{2}\right)=f\left(y^{2}\right)-f\left(x^{2}\right)=(f(y)-f(x))(f(y)+f(x))$$

Et alors $f(y) \geqslant f(x)$, ce qui assure que f est croissante sur $\mathbb{R}^{+}$. Comme elle est impaire, elle est donc croissante sur $\mathbb{R}$. Or, on a déjà vu qu'une solution monotone de l'équation de Cauchy est linéaire. Comme ici $f(1)=1$, c'est donc que f est l'identité qui, réciproquement, est bien une solution.

- Si n est impair et si $f(1)=-1$, on pose $g=-f$. La fonction g vérifie alors l'équation fonctionnelle initiale et $g(1)=1$. Le cas précédent nous indique que g est l'identité et donc que f est définie par $f(x)=-x$ pour tout réel x.

Réciproquement, cette dernière est bien une solution du problème.

Finalement, les solutions sont la fonction nulle, l'identité et, dans le cas où n est impair, la fonction $x \mapsto -x$.

Exercice 33.

Soit f une solution éventuelle.

- On commence par remarquer qu'alors f est croissante : en effet, si f est décroissante alors la fonction $f \circ f \circ f - 3f \circ f + 6f$ est également décroissante, et donc ne peut être égale à la fonction $x \mapsto 4x + 3$ puisque cette dernière est strictement croissante.

- L'équation fonctionnelle portant sur les itérées de f, il est naturel de considérer la suite (x_n) définie par $x_0 = x$ un réel donné et, pour tout entier $n \geqslant 0$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Alors :

$$x_{n+3} - 3x_{n+2} + 6x_{n+1} = 4x_n + 3$$

C'est une relation de récurrence linéaire d'ordre 3, à coefficients constants, mais il y a un terme constant (le 3). Qu'à cela ne tienne, on l'élimine en posant, pour tout entier $n \geqslant 0$, $y_n = x_n - n$. Il est facile de vérifier qu'alors, pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$y_{n+3} - 3y_{n+2} + 6y_{n+1} - 4y_n = 0$$

L'équation caractéristique associée est $X^3 - 3X^2 + 6X - 4 = 0$, ou encore $(X-1)(X^2 - 2X + 4) = 0$. Il y a donc trois racines distinctes qui sont $\alpha = 1$, $\beta = e^{i\pi/3}$ et $\gamma = e^{-i\pi/3}$. La suite (y_n) étant à valeurs réelles, il existe donc trois fonctions de x mais indépendantes de n, notées A, B, C, telles que, pour tout réel x et tout entier n :

$$y_n = A(x) + 2^n \left(B(x)\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + C(x)\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)$$

c.à.d. :

$$x_n = A(x) + 2^n \left(B(x)\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + C(x)\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right) + n \tag{27}$$

- Soient $x < y$ des réels. Puisque f est croissante, on a donc, pour tout entier $n \geqslant 0$, $f^n(x) \leqslant f^n(y)$ (où f^n désigne la n-ieme itérée de f). Et donc, d'après (27) :

$$\underbrace{A(x) - A(y)}_{A} \leqslant 2^n \underbrace{\left((B(y) - B(x))\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + (C(y) - C(x))\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)}_{B_n}$$

c.à.d. pour tout entier $n \geqslant 0$, $A \leqslant 2^n B_n$ avec $B_{n+3} = -B_n$.

Par une récurrence immédiate, il vient pour tout entier $p \geqslant 0$, $B_{3p} = (-1)^p B_0$, $B_{3p+1} = (-1)^p B_1$ et $B_{3p+2} = (-1)^p B_2$. De ce qui précède, on déduit que, pour tout entier $p \geqslant 0$, $A \leqslant 2^{6p} B_0 \leqslant -\frac{1}{8}A$. La suite $(2^{6p}B_0)$ est donc bornée, ce qui n'est possible que pour $B_0 = 0$. On prouve de même que $B_1 = B_2 = 0$, et donc que $B_n = 0$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

De $B_0 = 0$, on déduit que $B(x) = B(y)$, et donc, puisque $B_1 = 0$, on a aussi $C(x) = C(y)$. Cela assure que les fonctions B et C sont constantes. Soient alors b et c les réels tels que, pour tout réel x, on ait $B(x) = b$ et $C(x) = c$.

- Soit x un réel. Pour $n = 0$, il vient $x = x_0 = A(x) + b$. Pour $n = 1$, on obtient alors $f(x) = x_1 = x + c\sqrt{3}$.

Réciproquement, si c est une constante et $f : x \mapsto x + c\sqrt{3}$ alors on vérifie facilement que f est solution du problème si et seulement si $c = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Finalement, la seule solution est $f : x \mapsto x + 1$.

Exercice 34.

Soit f une solution éventuelle. Posons $F(n) = f(n) - 95$, et $m + 95 = k$. Alors, pour tous entiers $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 96$, il vient :

$$F(k + F(n)) = n + F(k) \tag{28}$$

Par suite $F(k + F(k + F(n)) = F(k + n + F(k))$. Mais, d'après (28), on a d'une part $F(k + F(k + F(n)) = k + F(n) + F(k)$ et, d'autre part $F(k + n + F(k)) = k + F(k + n)$. Par suite :

$$F(k + n) = F(n) + F(k) \tag{29}$$

pour tous entiers $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 96$.

On en déduit par récurrence que, pour tout entier $p \geqslant 1$, on a $F(p) = pF(1)$. En effet, cette égalité est vraie pour $p = 1$. Et, si elle est vraie pour un certain entier $p \geqslant 1$ fixé alors, d'après (29) et l'hypothèse de récurrence :

$$F(p + 1 + 96) = F(97) + F(p) = F(96) + F(1) + F(p) = F(96) + (p + 1)F(1)$$

D'autre part, d'après (29), on a :

$$F(p + 1 + 96) = F(p + 1) + F(96)$$

En comparant les deux égalités, on obtient $F(p + 1) = (p + 1)F(1)$, comme souhaité.

Pour tous entiers $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 96$, on a alors :

$$F(k + F(n)) = (k + F(n))F(1) = (k + nF(1))F(1) = kF(1) + n(F(1))^2$$

et, d'après (28), $F(k + F(n)) = n + F(k) = n + kF(1)$. Il en découle que $(F(1))^2 = 1$, et donc $F(1) = 1$.

Par suite, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $F(n) = n$ c.à.d. $f(n) = n+95$. Réciproquement, la fonction $f : (n \mapsto n + 95)$ est bien solution du problème.

Par ailleurs : $\sum_{k=1}^{19} f(k) = 19 \times 95 + \frac{19 \times 20}{2} = 1995$.

Exercice 35.

En cherchant un peu on remarque facilement que toutes les fonctions du type $x \mapsto x+d$, où d est une constante réelle, sont des solutions du problème. On va prouver que ce sont les seules.

Soit f une solution. Pour tout réel d, on pose donc $S_d = \{x \in \mathbb{R} / f(x) = x + d\}$. L'objectif est donc de prouver qu'il existe un unique réel d tel que $S_d \neq \varnothing$. Un premier pas est de remarquer qu'en tout cas, au moins un de ces ensembles est effectivement non vide, en considérant $d = f(0)$.

Intéressons-nous de plus près à la structure de ces ensembles S_d :

a) Pour tout réel d, si $x \in S_d$ alors $x + d \in S_d$. En effet, si $x \in S_d$ alors $f(x) = x + d$ et $f^{-1}(x + d) = x$. Or, on a $f(x + d) + f^{-1}(x + d) = 2(x + d)$, donc $f(x + d) = x + 2d$, ce qui assure que $x + d \in S_d$.

b) On va démontrer que si d, x et y sont des réels, avec $x \in S_d$, et si $x \leqslant y$ alors, pour tout réel $d' < d$, on a $y \notin S_{d'}$.

- Commençons par étudier le cas où $x \leqslant y < x + (d - d')$. Comme f est strictement croissante, il vient $f(y) \geqslant f(x) = x + d > y + d'$, et donc $y \notin S_{d'}$.

- On prouve alors par récurrence sur n que, pour tout entier $n \geqslant 1$, pour tout réel $x \in S_d$, si $x + (n-1)(d-d') \leqslant y < x + n(d-d')$ alors $y \notin S_{d'}$. On vient de voir que cette affirmation est vraie pour $n = 1$. Soit $n \geqslant 1$ un entier fixé, pour lequel on suppose l'affirmation vraie. Soient $x \in S_d$ et y un réel vérifiant $x+n(d-d') \leqslant y < x+(n+1)(d-d')$. Alors :

$$x + d + (n-1)(d-d') \leqslant y + d' < x + d + n(d-d')$$

Or, d'après a), $x+d \in S_d$. L'hypothèse de récurrence permet ainsi d'affirmer que $y+d' \notin S_{d'}$. Mais alors $y \notin S_{d'}$, sinon, toujours d'après a), on aurait $y + d' \in S_{d'}$. Ce qui achève la récurrence.

Or, comme $d-d' > 0$, pour tout réel $y \geqslant x$ il existe un entier n tel que $x+(n-1)(d-d') \leqslant y < x + n(d-d')$, et donc on déduit ainsi que $y \notin S_{d'}$.

c) On prouve maintenant que si $d' < d'' < d$ sont des réels pour lesquels que S_d et $S_{d'}$ sont non vides alors $S_{d''}$ est également non vide. Soient x et x' des réels tels que $x \in S_d$ et $x' \in S_{d'}$. Alors $f(x) - x = d$ et $f(x') - x' = d'$. Mais puisque f est bijective et strictement croissante, elle est continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction $g : t \mapsto f(t) - t$ est aussi continue sur $\mathbb{R}$. Et ainsi g prend toutes les valeurs intermédiaires entre d et d' (oui, oui, c'est le théorème des valeurs intermédiaires. Il est contenu dans le a) de la propriété 4). En particulier, il existe un réel x'' tel que $g(x'') = d''$, et donc $S_{d''} \neq \emptyset$.

d) On peut maintenant prouver notre conjecture : supposons qu'il existe des réels d et d' avec $d' < d$ tels que $S_d \neq \emptyset$ et $S_{d'} \neq \emptyset$. D'après c), il suffit d'étudier les cas $d' < d < 0$ et $0 < d' < d$. Or :

- Si $0 < d' < d$ alors, d'après a), l'ensemble $S_{d'}$ contient des éléments aussi grands que l'on veut, ce qui est impossible d'après b).
- Si $d' < d < 0$ alors, d'après a), l'ensemble S_d contient des éléments aussi petits que l'on veut, ce qui est à nouveau impossible d'après b).

Dans les deux cas, on obtient la contradiction désirée, et le résultat en découle.

Exercice 36.

Soit (f, g) un couple solution éventuel.

- Pour $x = 0$, on obtient :

$$f(g(y)) = b - ay \tag{30}$$

pour tout réel y, où $a = f(0)$ et $b = g(0)$. En particulier :

$$f(b) = f(g(0)) = b \tag{31}$$

- En remplaçant x par $g(x)$, on obtient, pour tous réels x, y :

$$f(g(x) + g(y)) = g(x)f(y) - yf(g(x)) + g(g(x))$$

Le membre de gauche étant symétrique en x et y, celui de droite l'est également. Donc, pour tous réels x, y :

$$g(x)f(y) - yf(g(x)) + g(g(x)) = g(y)f(x) - xf(g(y)) + g(g(y)) \tag{32}$$

En particulier, pour $x = 0$, il vient :

$$g(g(y)) = g(b) - yf(b) + bf(y) - g(y)a \tag{33}$$

On reporte (30) et (33) dans (32). Pour tous réels x, y on obtient :

$$g(x)f(y) - yb - xf(b) + bf(x) - ag(x) = g(y)f(x) - xb - yf(b) + bf(y) - ag(y)$$

ou encore, d'après (31) $g(x)f(y)+bf(x)-ag(x)=g(y)f(x)+bf(y)-ag(y)$, c.à.d. :

$$(g(x)-b)(f(y)-a)=(g(y)-b)(f(x)-a) \tag{34}$$

- Si f est constante, égale à a, alors, d'après l'équation fonctionnelle initiale, on déduit que, pour tous réels x et y on a $a=a(x-y)+g(x)$, ce qui entraine facilement que $a=0$ et $g(x)=0$. Par suite, g et f sont toutes deux identiquement nulles. Notons que, réciproquement, cela fournit bien un couple solution.

- Si f n'est pas constante, alors, il existe un réel y_0 tel que $f(y_0)-a\neq 0$. Soit E l'ensemble des réels x tels que $f(x)=a$. D'après (34), en choisissant $y=y_0$, on a alors $g(x)=b$ pour tout $x\in E$.

Et, pour tout réel $x\notin E$, toujours d'après (34), il vient $\frac{g(x)-b}{f(x)-a}=\frac{g(y_0)-b}{f(y_0)-a}=\alpha$, indépendant de x. Donc, pour tout $x\notin E$:

$$g(x)=\alpha(f(x)-a)+b \tag{35}$$

On constante que cette dernière relation reste valable pour $x\in E$ et donc pour tout réel x.

Revenons alors à l'équation fonctionnelle initiale. Pour tous réels x,y, on a :

$$f(x+\alpha(f(y)-a)+b)=xf(y)-yf(x)+\alpha(f(x)-a)+b$$

En particulier, pour $y=\alpha$, il vient $f(x+\alpha(f(\alpha)-a)+b)=xf(\alpha)-a\alpha+b$, ce qui assure que f est affine. Et donc, d'après que g est affine également.

On pose alors $f:x\mapsto mx+a$, avec $m\neq 0$ (puisque f n'est pas constante), et $g:(x\mapsto kx+b)$. De l'équation fonctionnelle initiale, il vient que, pour tous réels x,y :

$$m(x+ky+b)+a=x(my+a)-y(mx+a)+kx+b=ax-ay+kx+b$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} m=a+k \\ mk=-a \\ mb+a=b \end{cases}$$

Si $m=1$ alors $a=0$, d'où $k=0$ et ainsi $m=0$. Contradiction. Donc, $m\neq 1$. Dans ces conditions, il vient $k=\frac{m}{1-m}$, $a=-\frac{m^2}{1-m}$ et $b=-\frac{m^2}{(1-m)^2}$.

Finalement, les solutions sont les couples (f,g) tels que soit $f\equiv g\equiv 0$, soit $f:x\mapsto mx-\frac{m^2}{1-m})$ et $g:x\mapsto \frac{m}{1-m}x-\frac{m^2}{(1-m)^2})$ pour un certain $m\in\mathbb{R}^\star\backslash\{1\}$.

Exercice 37.

Soit f une telle application. On pose $f(1)=c$.

- Si l'on choisit $t=1$ alors, pour tout entier $s>0$,

$$f(f(s))=c^2s \tag{36}$$

En particulier $f(f(1))=f(c)=c^2$. On déduit de (36) que, pour tout entier $s>0$, $f(f(f(s)))=f\left(c^2s\right)$. Et d'autre part, d'après (36) toujours $f(f(f(s)))=c^2f(s)$. Ainsi, pour tout entier $s>0$:

$$f\left(c^2s\right)=c^2f(s) \tag{37}$$

D'après l'équation fonctionnelle, pour tous entiers $s,t>0$, $f\left(t^2f(f(s))\right)=f(s)(f(t))^2$. Donc, avec (36), il vient $f\left(t^2c^2s\right)=f(s)(f(t))^2$, et avec (37) on déduit alors que :

$$c^2f\left(t^2s\right)=f(s)(f(t))^2$$

En particulier, pour tous entiers $s, t > 0$, $c^2 f\left(t^2 s^2\right) = f\left(s^2\right)(f(t))^2$. Le membre de gauche étant symétrique en s et t, le membre de droite l'est également, c.à.d. $f\left(s^2\right)(f(t))^2 = f\left(t^2\right)(f(s))^2$. Pour $t = 1$, il vient alors $f\left(s^2\right) c^2 = c(f(s))^2$, d'où $f\left(s^2\right) c = (f(s))^2$.

Par suite $f\left(t^2 s^2\right) c^3 = c^2(f(ts))^2$ et, d'autre part, $c^3 f\left(t^2 s^2\right) = cf\left(s^2\right)(f(t))^2 = (f(s)f(t))^2$, d'où $c^2(f(ts))^2 = (f(s)f(t))^2$. Et, comme tout est positif, il vient :

$$f(s)f(t) = cf(st) \tag{38}$$

Une récurrence immédiate conduit alors à : pour tous entiers $n \geqslant 3$ et $t_1, \ldots, t_n > 0$, on a $f\left(t_1, \ldots, t_n\right) = \frac{1}{c^{n-1}} f\left(t_1\right) \ldots f\left(t_n\right)$. En particulier, pour tout entier $t > 0$,

$$f\left(t^n\right) = \frac{1}{c^{n-1}}(f(t))^n \tag{39}$$

Ainsi, $(f(t))^n$ est divisible par c^{n-1} pour tout entier $n \geqslant 2$.

- S'il existe un entier $m > 0$ tel que $f(m) = 1$, cela entraine alors que $c = 1$, et donc que $m = 1$ (puisque f est injective).

- Sinon, $c = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ où $k, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}^\star$ et $p_1, \ldots, p_k$ sont des nombres premiers deux à deux distincts. Soit $t > 0$ un entier. D'après ce qui précède, on peut affirmer que chacun des p_i divise $f(t)$. On appelle β_i l'exposant de p_i dans la décomposition en facteurs premiers de $f(t)$. D'après la relation (39), on a donc, pour tout entier $n \geqslant 2$, $(n-1)\beta_i \leqslant n\alpha_i$, c.à.d. $\frac{\beta_i}{\alpha_i} \leqslant \frac{n}{n-1}$. En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que $\frac{\beta_i}{\alpha_i} \leqslant 1$, c.à.d. $\beta_i \leqslant \alpha_i$. Cela assure que chacun des p_i apparaît dans la décomposition de $f(t)$ avec un exposant plus grand que celui avec lequel il apparaît dans la décomposition de c, et donc que c divise $f(t)$, ceci étant vrai pour tout entier $t > 0$.

On peut alors considérer la fonction $g : \mathbb{N}^\star \rightarrow \mathbb{N}^\star$ définie par $g(t) = \frac{1}{c} f(t)$ pour tout entier $t > 0$. Alors $g(1) = 1$, $g(c) = c$ et, d'après (38), pour tous entiers $s, t > 0$, $g(st) = g(s)g(t)$ (on dit que g est un morphisme multiplicatif, ou dans le cas des entiers, que g est totalement multiplicative).

De plus, d'après l'équation fonctionnelle, pour tous entiers $s, t > 0$, il vient :

$$c^2(g(t))^2 g(g(s)) = cg\left(t^2 cg(s)\right) = f\left(t^2 f(s)\right) = s(f(t))^2 = sc^2(g(t))^2$$

et, comme $c^2(g(t))^2 \neq 0$, on obtient $g(g(s)) = s$ (c.à.d. g est une involution).

Résumons : si f vérifie les conditions de l'énoncé alors on peut lui associer le morphisme involutif $g = \frac{1}{c} f$, qui vérifie évidemment les conditions de l'énoncé mais en prenant des valeurs qui ne dépassent pas celles de f. Ainsi, pour déterminer la plus petite valeur possible de $f(1998)$, il suffit de se restreindre aux morphismes involutifs g qui vérifient $g(1) = 1$ (il est clair que, réciproquement, tous les morphismes involutifs g qui vérifient $g(1) = 1$ vérifient également les conditions de l'énoncé).

Pour un tel morphisme, on a $g(1998) = g(2)(g(3))^2 g(37)$, avec $g(2)$, $g(3)$ et $g(37)$ deux à deux distincts et dans $\mathbb{N}^\star \backslash \{1\}$. Pour limiter l'effet de la puissance, on choisit donc $g(3) = 2$. Puisque g est une involution, cela entraine que $g(2) = 3$. Et, puisque c'est un morphisme, on a $g(9) = g(3)g(3) = 4$, ce qui interdit cette valeur pour $g(37)$. Il ne reste plus qu'à choisir $g(37) = 5$. Et alors $g(1998) = 120$.

Finissons tout de même la construction de g : on a $g(5) = 37$, et pour tout p premier autre que 2, 3, 5 et 37, on pose $g(p) = p$. Comme tout morphisme est entièrement déterminé par ses valeurs sur les nombres premiers, ces choix définissent bien g.

Finalement, la valeur minimale de $f(1998)$ est 120.

Exercice 38.

La fonction nulle est clairement solution du problème. Soit f une solution éventuelle autre que la fonction nulle.

- Si f ne s'annule pas : on pose alors $g = \frac{1}{f}$. La fonction g est continue et vérifie $g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(g(x)+g(y))$. On a vu à l'exercice 4 qu'alors g est une fonction affine. Or, puisque g ne doit pas non plus s'annuler, c'est donc qu'elle est constante. Par suite, f est constante.

Réciproquement, les fonctions constantes non nulles sont bien des solutions du problème.

- Il reste à prouver que f ne s'annule pas.

Comme f n'est pas la fonction nulle, il existe a tel que $f(a) \neq 0$. Par l'absurde : supposons qu'il existe un réel x tel que $f(x) = 0$. On considère alors la suite (x_n) définie par $x_0 = x$ et, pour tout entier $n \geqslant 0$, $x_{n+1} = \frac{x_n+a}{2}$. Alors $f(x_{n+1})(f(x_n)+f(a)) = 2f(x_n)f(a)$. Si $f(x_n) = 0$ alors $f(x_n)+f(a) = f(a) \neq 0$ et donc $f(x_{n+1}) = 0$. Il est donc facile de prouver par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $f(x_n) = 0$.

Or, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a également $x_{n+1} - a = \frac{1}{2}(x_n - a)$. Il est facile d'en déduire que la suite (x_n) converge vers a, et donc que par continuité, $f(a) = 0$. Contradiction.

Exercice 39.

Soit f une solution éventuelle. Alors, pour tout réel $x > 0$:

$$\alpha x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{x}{x+1}$$

et

$$\alpha \frac{1}{x^2} f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+1} = \frac{1}{x+1}$$

D'où :

$$\left(1-\alpha^2\right) f(x) = \frac{x(1-\alpha x)}{x+1}$$

- Si $\alpha \in \{-1, 1\}$, il vient $\frac{x(1-\alpha x)}{x+1} = 0$ pour tout réel $x > 0$, ce qui est clairement absurde. Il n'y a donc pas de solution pour une telle valeur de α.

- Si $\alpha > 1$, alors $f(x) = \frac{1}{1-\alpha^2}\frac{x(1-\alpha x)}{x+1}$. Mais, pour $x \in]0, \frac{1}{\alpha}[$, on obtient $f(x) < 0$. Contradiction. Il n'y a pas non plus de solution dans ce cas.

- Si $\alpha < -1$, alors $f(x) = \frac{1}{1-\alpha^2}\frac{x(1-\alpha x)}{x+1}$, et cette fois $f(x) < 0$ pour tout $x > 0$. Contradiction.

- Si $0 < \alpha < 1$, alors $f(x) = \frac{1}{1-\alpha^2}\frac{x(1-\alpha x)}{x+1}$, et $f(x) < 0$ pour tout $x > \frac{1}{\alpha}$. Contradiction.

- Si $\alpha \in]-1, 0]$, alors $f(x) = \frac{1}{1-\alpha^2}\frac{x(1-\alpha x)}{x+1}$.

Réciproquement, il n'est pas difficile de vérifier que si $\alpha \in]-1, 0]$ et $f : x \mapsto \frac{1}{1-\alpha^2}\frac{x(1-\alpha x)}{x+1}$ alors f est une solution du problème.

Finalement :

- Si $\alpha \notin]-1, 0]$ alors il n'y a aucune solution.

- Si $\alpha \in]-1, 0]$ alors $f : x \mapsto \frac{1}{1-\alpha^2}\frac{x(1-\alpha x)}{x+1}$ est la seule solution.

Exercice 40.

Soit f une solution éventuelle.

- Pour $x = y = z$, il vient $f(x, x) = (a+b)f(x, x)$.

a) Si $a+b \neq 1$, alors $f(x,x) = 0$ pour tout réel x. Or, pour $y = z$, l'équation fonctionnelle conduit à :

$$f(x,y) = af(x,y) + bf(y,y) = af(x,y)$$

D'où $a = 1$ ou f est la fonction nulle, qui réciproquement, est bien une solution.

Supposons que $a = 1$ et que, de plus, f ne soit pas la fonction nulle. Alors, pour tous réels x, y, z, $f(x,y) = f(x,z) + bf(y,z)$. Pour $x = y$, il vient alors $(1+b)f(x,z) = f(x,x) = 0$. D'où $b = -1$. L'équation fonctionnelle s'écrit alors $f(x,z) = f(x,y) + f(y,z)$ pour tous réels x, y, z.

En prenant $x = z$, on déduit alors facilement que, pour tous réels x, y, $f(x,y) = -f(y,x)$. Posons $g(x) = f(x,0)$. Alors, pour tous réels x, y, $f(x,y) = f(x,0) + f(0,y) = g(x) - g(y)$.

Réciproquement, si g est une fonction réelle quelconque qui vérifie $g(0) = 0$, on vérifie facilement que la fonction $f : (x,y) \mapsto g(x) - g(y)$ est une solution du problème.

b) Si $a + b = 1$. Alors, l'équation fonctionnelle s'écrit $f(x,y) = af(x,z) + (1-a)f(y,z)$. Et donc $f(x,x) = f(x,z)$, ce qui signifie que f est indépendante de sa deuxième variable (et donc qu'il s'agit en fait d'une fonction d'une seule variable).

Posons $h(x) = f(x,y)$. Alors, pour tous réels x, y, $h(x) = ah(x) + (1-a)h(y)$. Donc, la fonction h (et donc f) est constante ou $a = 1$. Dans le second cas, on a alors $b = 0$ et, pour tous réels x, y, $f(x,y) = f(x,x)$.

Réciproquement, les fonctions constantes sont bien solutions lorsque $a + b = 1$, et si de plus $a = 1$ alors toute fonction $f : (x,y) \mapsto h(x)$, où h est une fonction réelle arbitraire, est bien une solution.

Exercice 41.

Par l'absurde : supposons qu'il existe une telle fonction f. Alors, pour tous réels $x, y > 0$, $f(x+y) - f(x) > y(f(x))^2 \geqslant 0$. Il en découle que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. En particulier, la fonction f ne peut être identiquement nulle, et il existe donc un réel $\alpha > 0$ tel que $f(\alpha) \neq 0$.

Pour tout $y > 0$, on a alors $f(\alpha + y) > f(\alpha) + y(f(\alpha))^2$ et :

$$\lim_{y \to +\infty} f(\alpha) + y(f(\alpha))^2 = +\infty$$

donc f n'est pas majorée. En particulier, il existe un réel $a > 0$ tel que $f(a) > 0$.

Par suite, pour tout réel $x \geqslant a$, on a $f(x) \geqslant 0$. Pour un tel x, on choisit $y = \frac{1}{f(x)}$ et alors :

$$f\left(x + \frac{1}{f(x)}\right) > 2f(x) \tag{40}$$

Soit alors la suite (x_n) définie par $x_0 = a$ et, pour tout entier $n \geqslant 0$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{f(x_n)}$. Une récurrence sans difficulté montre que la suite (x_n) est alors bien définie, strictement croissante, et donc que $x_n \geqslant a$ pour tout entier $n \geqslant 0$. On pose alors $U_n = f(x_n)$. La suite (U_n) est donc à valeurs strictement positives et, d'après (40), pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$U_{n+1} = f(x_{n+1}) = f\left(x_n + \frac{1}{f(x_n)}\right) > 2f(x_n) = 2U_n$$

On en déduit facilement que (U_n) diverge vers $+\infty$, et plus précisément que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $U_n \geqslant 2^n U_0$.

Mais alors $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{f(x_n)} = \frac{1}{U_n} \leqslant \frac{1}{2^n U_0}$. En sommant, il vient :

$$x_{n+1} - a \leqslant \frac{1}{U_0} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} < \frac{2}{U_0}$$

ou encore $x_{n+1} < a + \frac{2}{U_0}$. Mais alors, puisque f est croissante, pour tout entier $n \geqslant 0$, $U_{n+1} = f(x_{n+1}) \leqslant f\left(a + \frac{2}{U_0}\right)$, ce qui entraine que (U_n) est bornée, et nous donne la contradiction attendue.

Exercice 42.

Soit P une solution éventuelle, autre que le polynôme nul.

- Pour $b = 1-a$ et $c = 0$, il vient $P(1-a,a) + P(a,1-a) + P(1,0) = 0$ pour tout réel a. De $P(1,0) = 1$, on déduit alors que :

$$P(1-a,a) = -1 - P(a,1-a) \tag{41}$$

- Pour $c = 1-a-b$, il vient, pour tous réels a et b :

$$P(1-a,a) + P(1-b,b) + P(a+b,1-a-b) = 0$$

Et donc, d'après (41) :

$$P(a+b,1-a-b) = P(a,1-a) + P(b,1-b) + 2 \tag{42}$$

Posons $f : x \mapsto P(x,1-x)+2$. Alors (42) s'écrit tout simplement $f(a+b) = f(a)+f(b)$, pour tous réels a et b. On reconnaît l'équation de Cauchy, et la définition de f assure qu'elle est continue. On sait qu'alors f est linéaire. Or, $f(1) = 2 + P(1,0) = 3$ donc $f(x) = 3x$ pour tout réel x. C.à.d. :

$$P(x,1-x) = 3x - 2 \tag{43}$$

pour tout réel x.

Pour tous réels a, b tels que $a + b \neq 0$, et pour $t = a + b$, $x = \frac{a}{a+b}$ et $y = \frac{b}{a+b}$, la condition i) conduit à $P(a,b) = (a+b)^n P(x,y)$ et on a $x + y = 1$. D'après (43), on déduit alors que

$$P(a,b) = (a+b)^n \left(3\frac{a}{a+b} - 2\right) = (a+b)^{n-1}(a-2b)$$

Et, comme P est continue, cette relation reste vraie même si $a + b = 0$. Ainsi, pour tous réels x et y, on a $P(x,y) = (x+y)^{n-1}(x-2y)$.

Réciproquement, il est facile de vérifier que ce polynôme est bien une solution.

Remarque : L'hypothèse selon laquelle la fonction recherchée doit être un polynôme ne sert en fait qu'à assurer la continuité. Elle aurait ainsi pu être affaiblie.

Exercice 43.

Soit f une solution éventuelle.

- Pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $f(x+2) = f(xf(2))f(2) = 0$. D'où f est identiquement nulle sur $[2;+\infty[$.

- Pour tout réel $y \in [0,2[$ et tout réel $x \geqslant 0$ on a d'une part, $f(xf(y))f(y) = 0$ si et seulement si $f(x+y) = 0$, c.à.d. $x + y \geqslant 2$, et d'autre part, $f(xf(y))f(y) = 0$ si et seulement si $f(xf(y)) = 0$ c.à.d. $xf(y) \geqslant 2$. Il en découle que les conditions $x \geqslant 2 - y$ et

$x \geqslant \frac{2}{f(y)}$ sont équivalentes. Et donc, que $\frac{2}{f(y)} = 2 - y$. Par suite, pour tout $y \in [0, 2[$, on a $f(y) = \frac{2}{2-y}$.

Finalement, la seule solution possible du problème est la fonction définie par :

$$f(y) = \frac{2}{2-y} \text{ si } y \in [0, 2[\quad \text{et} \quad f(y) = 0 \text{ si } y \geqslant 2$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que cette fonction est bien une solution du problème. Les conditions i) et ii) sont clairement vérifiées. Soient $x, y \geqslant 0$ deux réels.

- Si $x + y \geqslant 2$ et $xf(y) \geqslant 2$ alors les deux membres de l'égalité souhaitée sont égaux à 0.

- Si $x+y \geqslant 2$ et $xf(y) < 2$. Soit $y \geqslant 2$ et donc les deux membres de l'égalité sont égaux à 0. Soit $y < 2$, mais alors l'inégalité $xf(y) < 2$ s'écrit $x\frac{2}{2-y} < 2$, ce qui implique $x+y < 2$, en contradiction avec notre autre hypothèse. Ce cas ne peut donc pas se produire.

- Si $x+y < 2$ et $xf(y) < 2$ alors $y < 2$. Ainsi $f(y) = \frac{2}{2-y}$ et $f(xf(y)) = \frac{2}{2-xf(y)} = \frac{2}{2-\frac{2x}{2-y}}$. Par suite $f(xf(y))f(y) = \frac{2}{2-y}\frac{2}{2-\frac{2x}{2-y}} = \frac{2}{2-x-y} = f(x+y)$.

- Si $x + y < 2$ et $xf(y) \geqslant 2$ alors $x\frac{2}{2-y} \geqslant 2$, ce qui entraine $x + y \geqslant 2$, en contradiction avec notre autre hypothèse.

Finalement, dans tous les cas, la condition iii) est bien vérifiée, et f est une solution du problème.

Exercice 44.

Oui, on peut par exemple construire une telle fonction par récurrence, de la façon suivante. On pose $f(1) = 2$. Soit $n \geqslant 2$ un entier fixé. On suppose que les nombres $f(1), \ldots, f(n-1)$ ont été construits, avec $f(1) < \ldots < f(n-1)$.

On désigne par $g(n)$ le plus grand entier $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ tel que $f(k) \leqslant n$. On pose alors $f(n) = n+g(n)$. La condition de croissace sur les $f(i)$ assure qu'alors $g(n) \geqslant g(n-1)$, et donc que $f(n) > f(n-1)$.

D'autre part, puisque la fonction f est strictement croissante sur $\{1, 2, \ldots, n\}$ et que $f(1) = 2$, on a $f(n) > n$. Par suite $g(f(n)) = \max\{k \,/, 1 \leqslant k \leqslant n \text{ et } f(k) \leqslant f(n)\} = n$, d'où $f(f(n)) = g(f(n)) + f(n) = f(n) + n$.

Autre méthode de construction :

On note $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or). Il est facile de vérifier que φ est irrationnel et que $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose alors $f(n) = [n\varphi + \frac{1}{2}]$, où $[\cdot]$ désigne la partie entière.

- Puisque $\varphi = 1,6$ à 10^{-1} près, on a $f(1) = 2$ et f est strictement croissante.

- Pour tous entiers $m, n \geqslant 1$, tels que $f(n) = m$, $m < n\varphi + \frac{1}{2} < m + 1$, c.à.d. $n - \frac{1}{2\varphi} < \frac{m}{\varphi} < n + \frac{1}{2\varphi}$. Par suite $n - \frac{1}{2} < (\varphi-1)m < n + \frac{1}{2}$. D'où $m+n < \varphi m + \frac{1}{2} < m+n+1$. Et finalement, il vient $f(m) = m + n$, c.à.d. $f(f(n)) = f(n) + n$.

Exercice 45.

Soit f une solution éventuelle. On pose $S =]-1, +\infty[$. Pour tout $x \in S$, en choisissant $y = x$, il vient :

$$f(x + f(x) + xf(x)) = x + f(x) + xf(x) \tag{44}$$

et donc $x + f(x) + xf(x)$ est un point fixe de f.

Cela nous invite à étudier les points fixes de f. D'après ii), l'équation $\frac{f(x)}{x} = 1$ admet au plus deux solutions sur $S \backslash \{0\}$, pas plus d'une sur chacun des intervalles $]-1; 0[$ et $\mathbb{R}^{+\star}$.

- Si α est une de ces solutions, c'est un point fixe de f. Pour $x = y = \alpha$, il vient alors $f\left(\alpha^2 + 2\alpha\right) = \alpha^2 + 2\alpha$, et donc $\alpha^2 + 2\alpha$ est aussi un point fixe de f. Or, il n'est pas difficile de vérifier que α et $\alpha^2 + 2\alpha$ sont distincts et tous les deux dans le même des intervalles $]-1;0[$ ou $\mathbb{R}^{+\star}$, ce qui contredit notre remarque précédente.

Par suite, pour tout $x \in S\backslash\{0\}$, on a $\frac{f(x)}{x} \neq 1$. C.à.d. le seul point fixe possible de f est 0. Mais alors, d'après (44), pour tout $x \in S$, on a donc $x + f(x) + xf(x) = 0$, c.à.d. $f(x) = -\frac{x}{x+1}$.

Réciproquement, si f est définie par $f(x) = -\frac{x}{x+1} = -1 + \frac{1}{1+x}$ pour tout $x \in S$, alors, pour tout $x \in S$, on a $f(x) \in S$ et, si de plus $x \neq 0$, alors $\frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{1+x}$, ce qui assure que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est strictement croissante sur $]-1;0[$ et sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

Un calcul sans difficulté montre enfin que la condition i) est satisfaite, et donc que f est bien une solution du problème.

Références

[1] M. Aassila, *300 défis mathématiques*, Ellipses.
[2] P. Bornsztein, *Supermath*, Vuibert.
[3] P. Bornsztein, *Mégamath*, Vuibert.
[4] A. Engel, *Problem-solving strategies*, Springer.